



参考答案及解析

数学(二)

一、单项选择题

1. A 【解析】 $\frac{5(1-i)^2}{2-i} = \frac{-10i}{2-i} = \frac{-10i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = 2-4i$.

故选 A.

2. C 【解析】 向量 b 在 a 方向上的投影为 $\frac{a \cdot b}{|a|} = \frac{8}{4} =$

2. 故选 C.

3. B 【解析】 由扇形的面积公式得 $S = \frac{1}{2} \theta r^2 = \frac{9}{2} \theta = \frac{9\pi}{8}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 所以 $\tan \varphi = \tan[(\theta + \varphi) - \theta] =$

$\frac{\tan(\theta + \varphi) - \tan \theta}{1 + \tan(\theta + \varphi) \tan \theta} = \frac{3-1}{1+3} = \frac{1}{2}$. 故选 B.

4. C 【解析】 设它的速度为 x 米/秒, 根据题意得 $2\ 080 = 2 \times 1\ 040 < 20x < 0.8 \times 2\ 645 = 2\ 116$, $\therefore 104 < x <$

105.8 , 而 $\frac{104 \times 3\ 600}{1\ 000} = 374.4$, $\frac{105.8 \times 3\ 600}{1\ 000} =$

380.88 , 所以折算成时速, 其时速落在区间 $(374.4,$

$380.88)$ 之内, 对照各选项, 只有 C 适合. 故选 C.

5. B 【解析】 设圆锥 SO 的高为 h , 则 $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

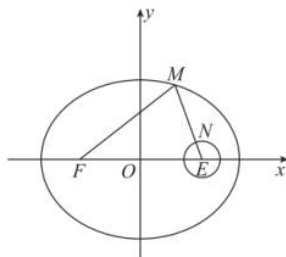
所以圆锥 $S'O'$ 与圆锥 SO 的相似比 $k = \frac{8}{4} = 2$, 所以

圆锥 $S'O'$ 的底面半径 $r = 6$, 母线长 $l = 10$, 于是得圆

锥 $S'O'$ 的侧面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 6 \times 10 = 60\pi$. 故

选 B.

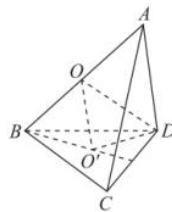
6. B 【解析】 如图, 易知圆 E 的圆心 E 为椭圆 C 的右焦点, 易知点 N 为如图位置时, $|MF| + |MN|$ 取得最小值, 其值为 $|MF| + |ME| - |NE| = 2a - 1 = 5$. 故选 B.



7. C 【解析】 因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(2) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也是单调递增, 且 $f(-2) = 0, f(0) = 0$, 所以当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 所以由 $xf(x-1) \leq 0$ 可得

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \leq 0 \\ x-1 \geq 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x-1 \leq 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \leq -2 \end{cases}, \text{ 解得 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 或 } 1 \leq x \leq 3. \text{ 故选 C.}$$

8. A 【解析】 如图,



由已知得 $CA^2 + CB^2 = AB^2, AD^2 + BD^2 = AB^2$, 所以 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, 所以三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的球心 O 为 AB 的中点, 且 $OA = OB = OC = OD =$

$\frac{13}{2}$, 设 $\triangle BCD$ 的外接圆圆心为 O' , 连接 $OO', O'D$, 则 $OO' \perp$ 面 BCD , 则 OO' 的长度即为点 O 到平面 BCD 的距离, 所以 $OO' \perp O'D, O'D = \frac{2}{3} BD \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

数学(二)

参考答案及解析

$$\text{所以 } OO' = \sqrt{OD^2 - O'D^2} = \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{25}{3}} = \frac{\sqrt{1221}}{6}.$$

故选 A.

二、多项选择题

9. CD 【解析】 $A = \{x | x < -\frac{1}{2}, \text{ 或 } x > 2\}$, 对照各选项, 只有 C、D 选项符合. 故选 CD.

10. AC 【解析】因为 $1+8=2+7$, 所以根据等比数列的性质可知 $a_1 a_8 = a_2 a_7$, A 选项正确; 由 a_2, a_4, a_6 同号, 可知 $a_4 = \sqrt{a_2 a_6} = 8$, B 选项错误; 对于 C 选项, 设公比为 q , 则 $a_3 + a_7 = a_5 \left(\frac{1}{q^2} + q^2\right) \geq a_5 \times 2\sqrt{\frac{1}{q^2} \times q^2} = 2a_5$, $q=1$ 时等号成立, C 选项正确; 当 $\{a_n\}$ 为常数列时, $a_{n+1} - a_n = 0$, $\{a_{n+1} - a_n\}$ 不是等比数列. 故选 AC.

11. ACD 【解析】由图可知 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$. A

选项正确; 又 $f(0) = 2\sin \varphi = \sqrt{3}$, 所以 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由

点 M 在 $f(x)$ 的单调递增区间上, $0 < \varphi < \pi$, 知 $\varphi =$

$\frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. B 选项错误; 当 $x \in$

$\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{7\pi}{3}, 3\pi\right]$, 所以由 $f(x_1) =$

$f(x_2)$, 得 $\frac{\left(2x_1 + \frac{\pi}{3}\right) + \left(2x_2 + \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{5\pi}{2}$, 所以 x_1

$+ x_2 = \frac{13\pi}{6}$, 所以 $\cos(x_1 + x_2) = \cos \frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C 选项正确; 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{12}$

个长度单位得到的图象对应的函数为 $f\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) =$

$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos 2x$, 故 D 选项正确. 故

选 ACD.

12. AB 【解析】当 $x < 0$ 时, 由 $f(x) \leq x$, 得 $\frac{3}{x} - x + \frac{1}{4}$

≤ 0 , 令 $g(x) = \frac{3}{x} - x + \frac{1}{4}$, 则由 $g'(x) = -\frac{3}{x^2} - 1 <$

0 , 得 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 而 $g(-2) = \frac{3}{4}$

> 0 , $g(-1) = -\frac{7}{4} < 0$, 故当 $x < 0$ 时, 不等式 $f(x)$

$\leq x$ 恰有一个整数解 -1 . 当 $x > 0$ 时, $f(x) \leq x$, 即

$mx^2 - \ln x - x \leq 0$, 因为 $x > 0$, 所以 $-mx + 1 \geq$

$-\frac{\ln x}{x}$. 令 $h(x) = -\frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = -\frac{1 - \ln x}{x^2}$. 当 0

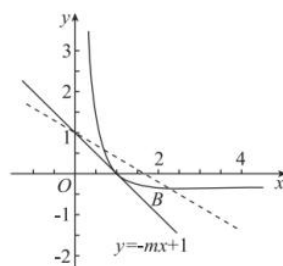
$< x < e$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > e$ 时, $h'(x) > 0$. 所以

$h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增,

且 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$ 且

$h(x) < 0$, $h(e) = -\frac{1}{e}$, 画出 $h(x)$ 的大致图象, 如图

所示.



当直线 $y = -mx + 1$ 与 $h(x)$ 图象相切时, 设切点为

$\left(x_0, -\frac{\ln x_0}{x_0}\right)$, 则 $-m = \frac{-\frac{\ln x_0}{x_0} - 1}{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0^2} - \frac{1}{x_0}$.

又 $h'(x_0) = -m = -\frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}$, 解得 $x_0 = 1$, 故 $m =$

1 , $-m = -1$, 当直线 $y = -mx + 1$ 过点 $B(2,$

$-\frac{\ln 2}{2})$ 时, $-m = -\frac{\frac{\ln 2}{2} + 1}{2} = -\frac{\ln 2 + 2}{4}$, 所以 -1

$\leq -m < -\frac{2 + \ln 2}{4}$, 得 $\frac{2 + \ln 2}{4} < m \leq 1$, 故 m 的取值范



围为 $(\frac{\ln 2+2}{4}, 1]$. 故选 AB.

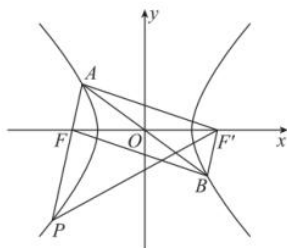
三、填空题

13. 14 【解析】该医院医生、护士、医疗技术人数之比为 $24:48:12=2:4:1$, 若医生和护士共抽取了 12 人, 则医生抽取了 4 人, 护士抽取了 8 人, 医疗技术抽取了 2 人, 故 $n=4+8+2=14$.

14. $-|x^2-9|$ (答案不唯一) 【解析】若函数 $f(x)=-|x^2-9|$, 则 $f(-x)=-|(-x)^2-9|=-|x^2-9|=f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, 画出 $f(x)$ 的图象易知 $f(x)$ 在区间 $(-3, 0)$ 上递减, 在 $(3, +\infty)$ 上递减, 故 $f(x)$ 的解析式可以是 $f(x)=-|x^2-9|$.

15. 1 30 【解析】令 $x=1$, 得 $a_0=3$, 令 $x=2$, 得 $4=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7$, 故 $a_1+a_2+\cdots+a_7=4-a_0=1$. 当相邻的两项为 a_0, a_1 时, 剩余一项可以从 a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 中任取, 共 5 种取法, 当相邻的两项为 a_6, a_7 时, 剩余一项可以从 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 中任取一项, 共 5 种取法, 当相邻的两项为 $a_1, a_2; a_2, a_3; a_3, a_4; a_4, a_5; a_5, a_6$ 时均为 4 种取法, 所以共 $5 \times 4 + 5 \times 2 = 30$ 种.

16. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】设双曲线 C 的右焦点为 $F'(c, 0)$, 连接 AF', BF', PF' , 如图,



根据双曲线的对称性及 $|OA|=|OF|$ 可知, 四边形 $AFBF'$ 为矩形. 设 $|AF|=|BF'|=m$, 则 $|BF|=|AF'|=2a+m$. 又 $|PF|=|BF|$, 所以 $|PF'|=2a+|PF|=2a+2a+m=4a+m$, $|PA|=|PF|+|AF|$

$=2a+2m$, 在 $\text{Rt}\triangle AFF'$ 和 $\text{Rt}\triangle PAF'$ 中, $m^2+(2a+m)^2=(2c)^2$ ①, $(2a+2m)^2+(2a+m)^2=(4a+m)^2$ ②, 由②得 $a=m$, 代入①, 得 $10a^2=4c^2$, 所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{10}{4}$, 所以 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

四、解答题

17. 解: (1) 若选①: 由 $\frac{\sqrt{3}a}{c}-\sin B=\sqrt{3}\cos B$, 得 $\sqrt{3}a=c\sin B+\sqrt{3}c\cos B$,

由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A=\sin C\sin B+\sqrt{3}\sin C\cos B$, 即 $\sqrt{3}\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos B=\sin C\sin B+\sqrt{3}\sin C\cos B$,

即 $\sqrt{3}\sin B\cos C=\sin C\sin B$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$,

所以 $\tan C=\sqrt{3}$,

又 $0 < C < \pi$, 故 $C=\frac{\pi}{3}$. (5 分)

若选②: 由 $2b-a=2c\cos A$,

得 $2\sin B-\sin A=2\sin C\cos A$,

即 $2\sin(A+C)-\sin A=2\sin C\cos A$,

整理得 $\sin A(2\cos C-1)=0$,

而 $\sin A \neq 0$, 故 $\cos C=\frac{1}{2}$,

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C=\frac{\pi}{3}$. (5 分)

若选③: 由正弦定理得 $\frac{\sin C\sin A}{1-\cos C}=\sqrt{3}\sin A$,

因为 $\sin A \neq 0$,

所以 $\sin C=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos C$, 即 $\sin(C+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $0 < C < \pi$, $\frac{\pi}{3} < C+\frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$,

所以 $C+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,

数学(二)

参考答案及解析

所以 $C = \frac{\pi}{3}$. (5分)

(2) 因为 AD 为角平分线, 所以 $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$,

故 $\angle ADC = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$,

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$
 (8分)

在 $\triangle ACD$ 中, $\frac{AD}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sin \frac{5\pi}{12}}$, 可得 $AD = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$. (10分)

18. 解: (1) 由 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$,

得 $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$,

故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. (2分)

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\begin{cases} 2a_1 + d = 12, \\ a_1 + 3d = 1, \end{cases}$$

解得 $a_1 = 7, d = -2$,

故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1)(-2) = -2n + 9$. (6分)

(2) 由 (1) 知 $b_n = |a_n| = |9 - 2n| = \begin{cases} 9 - 2n, & n \leq 4, \\ 2n - 9, & n \geq 5. \end{cases}$ (7分)

当 $n \leq 4$ 时, $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = S_n = -n^2 + 8n$; (9分)

当 $n \geq 5$ 时, $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_n) = -S_n + 2S_4$
 $= n^2 - 8n + 2(-4^2 + 8 \times 4) = n^2 - 8n + 32$. (11分)

所以 $T_n = \begin{cases} -n^2 + 8n, & n \leq 4, \\ n^2 - 8n + 32, & n \geq 5 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*). (12分)$

19. 解: (1) 取 AB 的中点 M , 连接 MC ,

因为底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB = 2CD$,

所以 $CD \parallel AM, CD = AM$,

所以四边形 $AMCD$ 为平行四边形.

所以 $CM \parallel AD, CM = AD = BC$.

又因为 $\angle ABC = \angle BAD = 60^\circ$,

所以 $\triangle MBC$ 为正三角形,

因此 $AB = 2BC = 2, CA = \sqrt{3}$, 因此 $BC \perp AC$. ① (2分)

因为 $AB \parallel CD, AA_1 \parallel DD_1$,

所以 $\angle CDD_1 = \angle A_1AB = 60^\circ$,

在 $\triangle CDD_1$ 中, 由余弦定理得 $CD_1^2 = CD^2 + DD_1^2 - 2CD \cdot DD_1 \cos \angle CDD_1 = 3$,

所以 $CD_1^2 + CD^2 = 4 = DD_1^2$,

所以 $CD_1 \perp CD$. (3分)

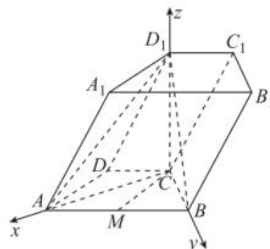
又平面 $CDD_1C_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $CDD_1C_1 \cap$ 平面 $ABCD = CD$,

所以 $CD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $CD_1 \perp BC$. ② (4分)

由 ①② 及 $CD_1 \cap AC = C$, 得 $BC \perp$ 平面 ACD_1 . (5分)

又 $BC \subset$ 平面 BCD_1 , 所以平面 $ACD_1 \perp$ 平面 BCD_1 . (6分)

(2) 由 (1) 知, BC, AC, CD_1 两两垂直, 故以 C 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD_1}$ 为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $C-xyz$, 如图所示,



新高考

压轴卷·新高考

数学(二)

则 $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), D_1(0, 0, \sqrt{3}), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$,

所以 $\overrightarrow{AD_1} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$,

设平面 ADD_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases},$$

可得平面 ADD_1 的一个法向量 $\mathbf{n} = (1, -\sqrt{3}, 1)$,

(9 分)

由(1)得 $BC \perp$ 平面 ACD_1 ,

所以平面 ACD_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{CB} = (0, 1, 0)$,

(10 分)

$$\text{则 } \cos \langle \overrightarrow{CB}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{CB}| |\mathbf{n}|} = \frac{-\sqrt{3}}{1 \times \sqrt{1+3+1}} = -\frac{\sqrt{15}}{5},$$

因为二面角 $C-AD_1-D$ 的平面角为锐角,

故二面角 $C-AD_1-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. (12 分)

20. 解: (1) 当直线 l 的斜率不存在时, 不满足与抛物线

$C: x^2 = 4y$ 交于 A, B 两点;

当直线 l 的斜率存在时, 设斜率为 k ,

则过点 $M(0, 4)$ 的直线 l 的方程为 $y = kx + 4$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = kx + 4, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } x^2 - 4kx - 16 = 0,$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow k \in \mathbf{R}, x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -16, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \frac{(x_1 x_2)^2}{16} =$$

$$-16 + \frac{(-16)^2}{16} = 0, \quad (5 \text{ 分})$$

所以 $OA \perp OB$. (6 分)

(2) 假设存在定点 $N(0, t)$, 使得向量 $\frac{\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AN}|} + \frac{\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{BN}|}$

与 $\overrightarrow{MN}$ 共线.

即存在定点 N , 使得 MN 平分 $\angle ANB$, 即 y 轴平分 $\angle ANB$,

则有 $k_{NA} + k_{NB} = 0$, (7 分)

$$\text{则 } k_{NA} + k_{NB} = \frac{y_1 - t}{x_1} + \frac{y_2 - t}{x_2}$$

$$= \frac{(y_1 - t)x_2 + (y_2 - t)x_1}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{(kx_1 + 4 - t)x_2 + (kx_2 + 4 - t)x_1}{x_1 x_2} = 0, \quad (9 \text{ 分})$$

整理得 $2kx_1 x_2 + (4 - t)(x_1 + x_2) = 0$,

即为 $-32k + 4k(4 - t) = 0$, 整理得 $k(-4 - t) = 0$,

所以 $t = -4$. (11 分)

所以在 y 轴上存在定点 $N(0, -4)$, 不管直线 l 的斜

率为何值, 向量 $\frac{\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AN}|} + \frac{\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{BN}|}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 始终共线.

(12 分)

21. 解: (1) 由题意知, 样本平均数为 $\bar{x} = 45 \times 0.1 + 55 \times$

$$0.15 + 65 \times 0.2 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.15 + 95 \times 0.1 = 70.5. \quad (2 \text{ 分})$$

所以可以估计该科技企业所生产的芯片性能指标值的平均数为 70.5 分. (3 分)

(2) (i) 由题意知芯片为 A 级或 B 级芯片的概率 P

$$= \frac{30 + 20 + 60}{200} = 0.55,$$

则从该科技企业所生产的芯片中随机抽取 3 片芯片, 至少有 2 片芯片为 A 级或 B 级芯片的概率为

$$P = 1 - C_3^0 0.45^3 - C_3^1 0.45^2 \times 0.55 = 0.57475.$$

(6 分)

(ii) 由题意可知, 该芯片的性能指标值与对应概率如下表所示: ($1 < m < 4$)

新高考

数学(二)

参考答案及解析

性能 指标值	[40,50)	[50,70)	[70,90)	[90,100]
纯利润	$-40e^m$	$30m$	$50m$	$70m$
概率	0.1	0.35	0.45	0.1

故每块芯片的纯利润 $E(X) = -40e^m \times 0.1 + 30m \times 0.35 + 50m \times 0.45 + 70m \times 0.1 = -4e^m + 40m$,

(8分)

记 $y = E(X)$, 则 $y' = -4e^m + 40 = -4(e^m - 10)$,

令 $y' = 0$, 得 $m = \ln 10$,

故当 $m \in (1, \ln 10)$ 时, $y' > 0$, $y = E(X)$ 单调递增,

当 $m \in (\ln 10, 4)$ 时, $y' < 0$, $y = E(X)$ 单调递减,

所以当 $m = \ln 10 \approx 2.30$ 时, y 取得最大值,

$y_{\max} = -4e^{\ln 10} + 40 \times \ln 10 \approx -4 \times 10 + 40 \times 2.30 = 52$ (元),

(10分)

由已知, 2 年内该科技企业盈利的最大值为 $2 \times 2\,000\,000 \times 52 = 208\,000\,000$ (元) = 2.08(亿元),

2.08 亿元 > 2 亿元, 故该科技企业有可能在 2 年之内收回总投资.

(12分)

22. 解: (1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 + 2(x-1)\cos x$

$= 2(x-1)\cos x + x^2(x-1) - 2(x-1)$

$= (x-1) \times (2\cos x + x^2 - 2)$,

(2分)

令 $g(x) = 2\cos x + x^2 - 2$.

则 $g'(x) = -2\sin x + 2x$,

设 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = 2 - 2\cos x \geq 0$ 恒成立,

所以 $g'(x) = -2\sin x + 2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g'(0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$.

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(4分)

$g(x)_{\min} = g(0) = 0$, 即 $g(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 即

$2\cos x + x^2 - 2 \geq 0$ 恒成立, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 故 $f(x) < 0$ 的解集是 $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

(6分)

(2) 要证 $2\cos x > 1 - 2x^2 \ln x$,

只需证 $2x^2 \ln x + 2\cos x > 1$,

由(1)知当 $x > 0$ 时, $2\cos x > 2 - x^2$,

故只需证 $2x^2 \ln x + 2 - x^2 \geq 1$,

(8分)

只需证 $2x^2 \ln x + 1 - x^2 \geq 0$,

只需证 $2\ln x + \frac{1}{x^2} - 1 \geq 0$.

(9分)

令 $u(x) = 2\ln x + \frac{1}{x^2} - 1 (x > 0)$,

则 $u'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x^3} (x > 0)$.

令 $u'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $u'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$,

故 $u(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $u(x)_{\min} = u(1) = 0$, 即 $u(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

故 $2\cos x > 1 - 2x^2 \ln x$.

(12分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办公理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线