中学生标准学术能力诊断性测试 2017 年 11 月测试

数学理科试卷

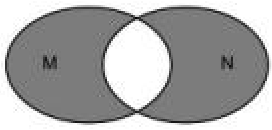
第 I 卷（选择题）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每个小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求.

1.已知集合 $M=\{x\mid y=\ln(3+2x-x^2)\}$，集合 $N=\{y\mid y=4^{x-2}\}$，则图中阴影部分表示的集合为

A. $(-1,0]\cup[3,+\infty)$　　B. $[0,3)$

C. $(0,3)$　　D. $(-1,0]\cup(3,+\infty)$



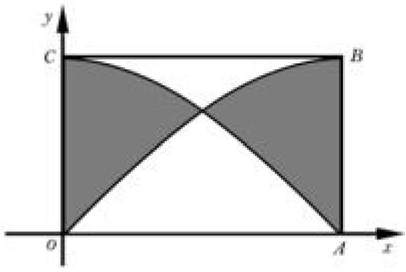
2.已知命题 p：若 $k<8$，则方程 $\dfrac{x^2}{35-k}+\dfrac{y^2}{k-8}=1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线；命题 q：在 ΔABC 中，若 $\sin A<\sin B$，则 $A<B$，则下列命题为真命题的是

A. $\neg q$　　B. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　C. $p\wedge q$　　D. $p\wedge(\neg q)$

3.魏晋时期数学家刘徽首创割圆术，他在九章算术方田章圆填术中指出："割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不能割，则与圆周合体而无所失矣。"这是一种无限与有限的转化过程，比如在正数 $\dfrac{12}{1+\dfrac{12}{1+\cdots}}$ 中的"…"代表无限次重复，设 $x=\dfrac{12}{1+\dfrac{12}{1+\cdots}}$，则可利用方程 $x=\dfrac{12}{1+x}$ 求得 x，类似的可得正数 $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\cdots}}}=$

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

4.如图，在矩形 $OABC$ 中的曲线分别是 $y=\sin x, y=\cos x, A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right), C(0,1)$，在矩形 $OABC$ 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率为



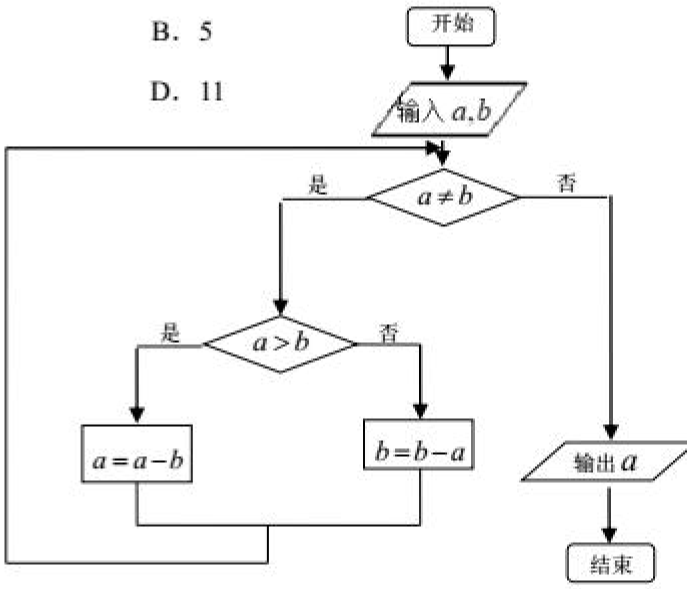
A. $\dfrac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{\pi}$　　B. $\dfrac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{\pi}$

C. $4\left(\sqrt{3}-1\right)\pi$　　D. $4\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$

5.下面的程序框图的算法思路来源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”。若输入 a,b 的分别为 98 和 63，执行该程序框图后，输出 a 的值

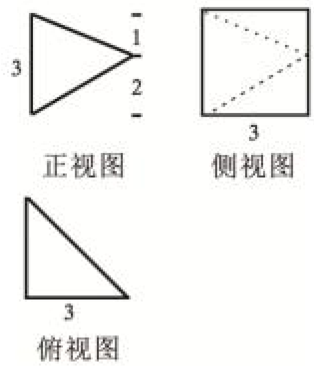
A. 3　　B. 5

C. 7　　D. 11



6.某几何体的三视图如右图所示，则该几何体的最长棱为

A. $\sqrt{19}$　　B. $\sqrt{22}$　　C.5　　D. $2\sqrt{7}$



7.数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$ 且 $a_n-a_{n-1}=2^{n-1}\left(n\ge 2\right)$，则数列 $\left\{\dfrac{2^{n-1}}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为

A. $1-\dfrac{1}{2^n-1}$　　B. $1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

C. $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$　　D. $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

8.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{54}=1\left(a>0\right)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2，虚轴的两个端点分别为 B_1,B_2，若四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的内切圆的面积为 18π，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C.2　　D. $\sqrt{5}$

9.已知函数 $f\left(x\right)=3\sin x+\frac{1}{6}x^3$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $nx-y-6=0$ 平行，则 $\left(|x|+\frac{1}{|x|}-2\right)^n$ 的展开式中的常数项为

A. -20　　B. 20　　C. -15　　D. 15

10.将函数 $y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x+1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，再将所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象，则下面关于函数 $y=g\left(x\right)$ 的叙述不正确的是

A.函数 $g\left(x\right)$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. 函数 $g\left(x\right)$ 的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$

C.函数 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调递增

D.当 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\left(k\in z\right)$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 有最小值-1

11.已知定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)=4-f\left(-x+2\right),g\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)+2$，若函数 $f\left(x\right)$ 的图象与函数 $g\left(x\right)$ 图象的交点为 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right),\cdots,\left(x_n,y_n\right)$，则 $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+y_i\right)=$

A. n　　B. $2n$　　C. $3n$　　D. $4n$

12.设点 $M\left(x_1,f\left(x_1\right)\right),N\left(x_2,g\left(x_2\right)\right)$ 分别是函数 $f\left(x\right)=\ln x+\frac{1}{2}x^2$ 和 $g\left(x\right)=2x-6$ 图象上的点，$x_1\geq 1,x_2\geq 1$，若直线 $MN//x$ 轴，则 M,N 两点间距离的最小值为

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，且 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|$，则 $2\vec{b}-\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角的正切值为________________.

14.已知变量 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\leq 4\\x+y\geq 3\\x\geq 1,y\geq 1\end{cases}$，则 $\frac{x^2+5xy+y^2}{xy}$ 的取值范围为________________.

15. 已知正四面体 ABCD 的棱长为，四个顶点都在球心 O 的球面上，点 P 为棱 BC 的中点，过 P 作球 O 的截面，则截面面积的最小值为________________.

16.过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 作直线 l 与抛物线交于 A,B 两点，记抛物线在 A,B 两点处的切线 l_1,l_2 的交点为 P,则 ΔABP 面积的最小值为________________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出必要的文字说明或推理、验算过程.

17.（本题满分 12 分）

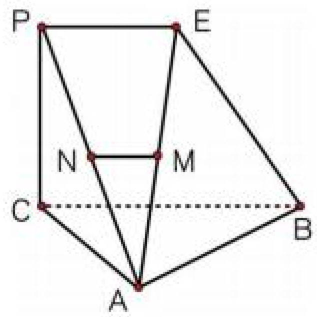
已知 ΔABC 的面积为 S,其外接圆半径为 R,三个内角 A,B,C 所对的边分别为 $a,b,c,2R\left(\sin^2 A-\sin^2 C\right)=\left(\sqrt{3}a-b\right)\sin B.$，

（1）求角 C;

（2）若 $\left(\frac{\sqrt{S}}{2R}\right)^2=\sin^2 A-\left(\sin B-\sin C\right)^2,a=4$，求 c 及 ΔABC 的面积

18.（本题满分 12 分）

如图，多面体 $A-PCBE$ 中，四边形 $PCBE$ 是直角梯形，且 $PC\perp BC, PE // BC$，平面 $PCBE\perp$ 平面 $ABC, AC\perp BE, M$ 是 AE 的中点，N 是 PA 上的点.



（1）若 $MN//$ 平面 ABC，求证：N 是 PA 中点；

（2）若 $PE=\frac{1}{3}BC$，且 $AC=BC=PC$，求二面角 $E-AB-C$ 的余弦值.

19.（本题满分 12 分）

某电视厂家准备在元旦期间举办促销活动，现根据近七年的广告费与销售量的数据确定此次广告费支出。广告费支出 x_i 和销售量 y_i（万台）的数据如下：

年份	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
广告费支出	1	2	4	6	11	13	19
销售量	1.9	3.2	4.0	4.4	5.2	5.3	5.4

（1）若用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求出 y 关于 x 的线性回归方程；

（2）若用 $y=c+d\sqrt{x}$ 模型拟合 y 与 x 的关系可得回归方程 $\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{x}$，经计算线性回归模型及该模型的 R^2 分别为 0.75 和 0.88，请用 R^2 说明选择哪个回归模拟模型更好。

（3）已知利润 z 与 x,y 的关系为 $z=200y-x$，根据（2）的结果回答下列问题：

①广告费 $x=20$ 时，销售量及利润的预报值是多少？

②广告费 x 为何值时，利润的预报值最大？（精确到 0.01）

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$；

参考数据：$\sqrt{5}\approx 2.24$

20.（本题满分 12 分）

已知圆 $B:\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2=16$，定点 $A\left(\sqrt{2},0\right)$，P 是圆周上任意一点，线段 AP 的垂直平分线与 BP 交于点 Q.

（1）求点 Q 的轨迹 C 的方程；

（2）直线 l 过点 A 且与 x 轴不重合，直线 l 交曲线 C 于 M,N 两点，过 A 且与 l 垂直的直线与圆 B 交于 D,E 两点，求四边形 $MDNE$ 面积的取值范围.

21.（本题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\ln\dfrac{1}{x}-ax^2+x.$

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $f\left(x\right)$ 在定义域内有两个极值点 x_1,x_2，求证：$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>3-2\ln 2$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果两题都做，则按照所做的第一题给分；作答

时，请用 2B 铅笔将答题卡上相应的题号涂黑。

22.（本题满分 10 分）选修 4-4：参数方程与极坐标系

在平面直角坐标系 xoy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\sqrt{3}t \\ y=3+t \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+2\rho^2\sin^2\theta=3.$

（1）求曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程；

（2）过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 45° 的直线，交 l 于点 A，求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

23.（本题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-1|-|x+2|$.

（1）若存在 $x_0\in R$ 使得 $f(x_0)+2a^2\le 4a$ 的解集为，求实数 a 的取值范围；

（2）在（1）的条件下，记 a 的最大值为 a_0，若 $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}=a_0$，则当 a,b,c 取何值时，$a^2+4b^2+9c^2$ 取得最小值，并求出该最小值.