重庆市第八中学2024届高考适应性月考卷（一）
数学参考答案

一、**单项选择题**（本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	D	C	B	A	C

二、**多项选择题**（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

题号	9	10	11	12
答案	BCD	ACD	BCD	BCD

三、**填空题**（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	$-20x^2$	4	$5+2\sqrt{6}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

（1）证明：法一：如图 1，连接 B_1D_1 与 A_1C_1 交于点 O，连接 OF, EF，

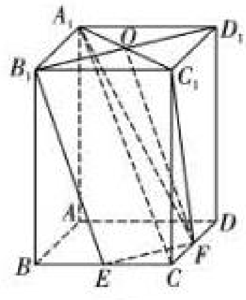

图 1

因为 E 为棱 BC 的中点，F 为棱 CD 的中点，

所以 $EF /\!/ BD$，且 $EF=\frac{1}{2}BD$，

由 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，可知 $B_1D_1 /\!/ BD$，且 $B_1D_1=BD$，

所以 $EF /\!/ B_1D_1$ 且 $EF=\frac{1}{2}B_1D_1=B_1O$，故四边形 B_1EFO 为平行四边形，

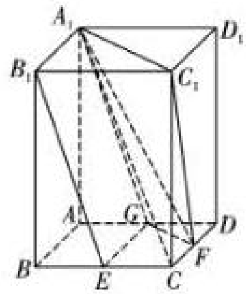

图 2

所以 $B_1E /\!/ OF$，又因为 $OF\subset$ 平面 A_1C_1F，$B_1E\not\subset$ 平面 A_1C_1F，

所以 $B_1E /\!/$ 平面 A_1C_1F．……………………………………（5 分）

法二：如图 2，取 AD 中点为 G，连接 A_1G，GF，EG，

由于 G, F 分别为 AD, CD 的中点，则 $GF /\!/ AC /\!/ A_1C_1$，

则 A_1，G，F，C_1 四点共面；

因为 E, G 分别为 BC, AD 中点，则有 $EG /\!/ AB$ 且 $EG=AB$，

而 $A_1B_1 /\!/ AB$ 且 $A_1B_1=AB$，故 $EG /\!/ A_1B_1$ 且 $EG=A_1B_1$，

故 A_1B_1EG 为平行四边形，所以 $B_1E /\!/ A_1G$，

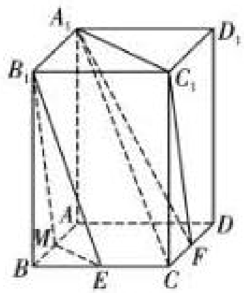

图 3

又因为 $A_1G\subset$ 平面 A_1C_1F，$B_1E\not\subset$ 平面 A_1C_1F，

所以 $B_1E /\!/$ 平面 A_1C_1F．……………………………………（5 分）

法三：取 AB 中点为 M，如图 3，证明平面 $B_1ME /\!/ A_1C_1F$ 即可．

……………………………………………………………（5 分）

（2）解：设正四棱柱底面边长为 2，则侧棱长为 4，

分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系，

则 $A(0,\ 0,\ 0)$，$A_1(0,\ 0,\ 4)$，$C(2,\ 2,\ 0)$，$C_1(2,\ 2,\ 4)$，$F(1,\ 2,\ 0)$，

则 $\overrightarrow{A_1C}=(2,\ 2,\ -4)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(2,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{A_1F}=(1,\ 2,\ -4)$，

设平面 A_1C_1F 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

则有$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1F}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=0,\\ x+2y-4z=0,\end{cases}$ 取$z=1$，$\vec{n}=(-4,\ 4,\ 1)$，

设直线A_1C与平面A_1C_1F所成角为α，

则$\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{A_1C},\ \vec{n}\rangle|=\left|\dfrac{2\times(-4)+2\times4+(-4)\times1}{\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+4^2+1^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{22}}{33}$. ……………………（10分）

18．（本小题满分12分）

解：（1）（方法一）由题意知，$a_n-a_{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

$a_{n-1}-a_n=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，$a_{n-2}-a_{n-1}=\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}$，…，$a_1-a_2=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}$，

相加得：$a_1-a_n=1-\dfrac{1}{n}$，其中$n\geqslant2$.

又$a_1=2$，$\therefore a_n=1+\dfrac{1}{n}$，

而$a_1=2$符合上式，故$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=1+\dfrac{1}{n}$. ……………………………………………………（5分）

（方法二）由题意知，$a_n-a_{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，$a_{n+1}-\dfrac{1}{n+1}=a_n-\dfrac{1}{n}$，

进而$a_n-\dfrac{1}{n}=a_{n-1}-\dfrac{1}{n-1}=\cdots=a_1-\dfrac{1}{1}=1$，$a_n=1+\dfrac{1}{n}$. ……………………………………（5分）

（2）由（1）$a_n=1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+1}{n}$，

$a_1a_2\cdots a_n=2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n+1}{n}=n+1$，

于是$b_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{2^n}=\dfrac{n+1}{2^n}$，

$\therefore S_n=\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n}$，$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$，

相减得：$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{2}{2^1}+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=1+\dfrac{\frac{1}{2^2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{n+3}{2^{n+1}}$，

故$S_n=3-\dfrac{n+3}{2^n}$. ……………………………………………………………………………（12分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）方案①更为合理，因为方案②抽样中未按比例分配进行分层抽样，所以总体中每个个体被抽到的可能性不完全相同，而男生和女生的身高差异较大，因而样本的代表性差，即样本分布与总体分布相差较大，所以得到的总样本均值与方差作为总体均值与方差的估计偏差较大.……………………………………………………………………（3 分）

（2）其中男生身高样本记为 x_1，x_2，$\cdots x_{40}$，均值 $\overline{x}=170\text{cm}$，方差 $s_x^2=18$，

女生身高样本记为 y_1，y_2，$\cdots y_{20}$，均值 $\overline{y}=161\text{cm}$，方差 $s_y^2=30$．

则总样本均值 $\overline{z}=\dfrac{40}{60}\overline{x}+\dfrac{20}{60}\overline{y}=\dfrac{40\times170+20\times161}{60}=167$．

又因为 $\sum\limits_{i=1}^{40}(x_i-\overline{x})=\sum\limits_{i=1}^{40}x_i-40\overline{x}=0$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{40}2(x_i-\overline{x})(\overline{x}-\overline{z})=2(\overline{x}-\overline{z})\sum\limits_{i=1}^{40}(x_i-\overline{x})=0$，同理可得 $\sum\limits_{j=1}^{20}2(y_j-\overline{y})(\overline{y}-\overline{z})=0$，

所以总样本方差 $s^2=\dfrac{1}{60}[\sum\limits_{i=1}^{40}(x_i-\overline{z})^2+\sum\limits_{j=1}^{20}(y_j-\overline{z})^2]$

$=\dfrac{1}{60}[\sum\limits_{i=1}^{40}(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\overline{z})^2+\sum\limits_{j=1}^{20}(y_j-\overline{y}+\overline{y}-\overline{z})^2]$

$=\dfrac{1}{60}\{40[s_x^2+(\overline{x}-\overline{z})^2]+20[s_y^2+(\overline{y}-\overline{z})^2]\}$

$=\dfrac{2}{3}[(170-167)^2+18]+\dfrac{1}{3}[(161-167)^2+30]=40$．

总样本学生的身高的均值为 $\overline{z}=167$，方差为 $s^2=40$. ……………………………………（8 分）

（3）其平均数为 $\overline{z}'=\dfrac{1}{58}(167\times60-154-180)=167=\overline{z}$，

方差为：$s'^2=\dfrac{1}{58}[s^2\times60-(154-167)^2-(180-167)^2]\approx35.6$. …………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）连接 BD，在 $\triangle ABD$ 中，$\tan\angle BAD=2$，则 $\cos\angle BAD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$AD=\sqrt{5}AB$，

由余弦定理得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=AB^2+5AB^2-2AB\cdot\sqrt{5}AB\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$=4AB^2$，

则 $BD=2AB$，$\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\angle CBD=\dfrac{\pi}{4}$，

在 $\triangle BCD$ 中，$BC=CD=2$，故 $BD=2\sqrt{2}$，所以 $AB=\sqrt{2}$．…………………………（5 分）

（2）设 $\angle CBD=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，在 $\triangle BCD$ 中，$BC=CD=2$，

于是 $BD=2BC\cos\angle CBD=4\cos\alpha$，$AB=2\cos\alpha$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$，

由余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$，

则 $AC^2=4\cos^2\alpha+4-8\cos\alpha\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=4\cos^2\alpha+4+8\sin\alpha\cos\alpha$

$=4\sin 2\alpha+2(\cos 2\alpha+1)+4=2\sqrt{5}\sin(2\alpha+\varphi)+6\leqslant 2\sqrt{5}+6$，

当且仅当 $2\alpha+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时取等号，$AC_{\max}=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}=1+\sqrt{5}$，

所以 AC 的最大值是 $1+\sqrt{5}$．……………………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）∵椭圆 C 的左焦点为 $F(-1,0)$，∴ $c^2=a^2-b^2=1$①，

∵椭圆上任意一点到 F 的距离的最大值为 3，

∴ $a+c=3$②，

由①②解得 $b^2=3$，$a^2=4$，

故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．……………………………………………………（4 分）

（2）①当直线 l 与 y 轴垂直时，点 $M(0,0)$ 不在椭圆上，显然不满足条件．

……………………………………………………………………………………………（5 分）

②当直线 l 不与 y 轴垂直时，设直线 l 的方程为 $x=my-1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=my-1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x，得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，$\Delta=144(m^2+1)>0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

则 $x_1+x_2=my_1-1+my_2-1=\dfrac{6m^2}{3m^2+4}-2=\dfrac{-8}{3m^2+4}$，

若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，则 $M\left(\dfrac{-16}{3m^2+4},\ \dfrac{12m}{3m^2+4}\right)$，…………………………（7分）

又点 M 在椭圆 C 上，则 $\dfrac{\left(\dfrac{-16}{3m^2+4}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(\dfrac{12m}{3m^2+4}\right)^2}{3}=1$，即 $\dfrac{64+48m^2}{(3m^2+4)^2}=1$，

化简得 $9m^4-24m^2-48=0$，

即 $(m^2-4)(9m^2+12)=0$，解得 $m^2=4$．…………………………………………（9分）

$\therefore S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|OF||y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{6\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$，

又 $\overrightarrow{OM}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，不妨设 AB 中点为 N，

则 $|OM|=4|ON|$，故 $S_{\triangle AMB}=3S_{\triangle AOB}$，

$\therefore$ 四边形 $AOBM$ 的面积 $S_{AOBM}=4S_{\triangle AOB}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$．……………………………（12分）

22．（本小题满分 12 分）

证明：（1）（ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x+1-a$，

令 $g(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x+1-a$，$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单减，$g(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单增，

由 $2<a<2+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 知，$g(1)=2-a<0$，$g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+2-a>0$，

$g\left(\dfrac{1}{2a}\right)=2a-\ln 2a+1-a=a+1-\ln 2a>a+1-\ln 2-\ln\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)>a+1-\ln 6>0$，

$\therefore$ 由零点存在定理知，存在 $m\in\left(\dfrac{1}{2a},\ 1\right)$，$n\in(1,\ \mathrm{e})$，使得 $g(m)=g(n)=0$，

且当 $0<x<m$ 或 $x>n$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

当 $m<x<n$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\ m)$ 上单增，在 $(m,\ n)$ 上单减，在 $(n,\ +\infty)$ 上单增．

故 $f(x)$ 存在唯一的极小值点 $x_0=n$.……………………………………………………（4 分）

（ii）由（i）知 $x_0\in(1,\ e)$，$f'(x_0)=0$，且 $\dfrac{1}{x_0}+\ln x_0+1=a$ ①，

$\therefore f(x)_{极小值}=f(x_0)=(x_0+1)\ln x_0-a(x_0-1)=h(a)$ （*），

将①代入（*）得

$$f(x_0)=h(a)=(x_0+1)\ln x_0-\left(\frac{1}{x_0}+\ln x_0+1\right)(x_0-1)=2\ln x_0-x_0+\frac{1}{x_0}.$$

令 $m(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$，$x\in(1,\ e)$，

$m'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-(x-1)^2}{x^2}<0$，$\therefore m(x)$ 在 $(1,\ e)$ 上单减，

$\therefore m(x)>m(e)=2-e+\dfrac{1}{e}$，

也即 $f(x_0)>2-e+\dfrac{1}{e}$. ……………………………………………………（8 分）

（2）显然 $f(1)=0$，不妨设 $x_2=1$，

又由（1）知 $f(x)$ 在 $(1,\ n)$ 上单减，在 $(n,\ +\infty)$ 上单增，

且 $f(e^a)=(e^a+1)a-a(e^a-1)=2a>0$，

$\therefore$ 由零点存在定理知，在 $(1,\ +\infty)$ 上存在唯一的 p，使 $f(p)=0$，不妨记 $x_3=p$；

又 $f\left(\dfrac{1}{x_3}\right)=\left(\dfrac{1}{x_3}+1\right)\ln\dfrac{1}{x_3}-a\left(\dfrac{1}{x_3}-1\right)=\dfrac{-(x_3+1)\ln x_3+a(x_3-1)}{x_3}=\dfrac{-f(x_3)}{x_3}=0$，

且 $\dfrac{1}{x_3}\in(0,\ 1)$，

$\therefore$ 在 $(0,\ 1)$ 上存在唯一的 $\dfrac{1}{x_3}$，使 $f\left(\dfrac{1}{x_3}\right)=0$，即 $x_1=\dfrac{1}{x_3}$，

因此有 $x_1x_2x_3=1$ 成立. ……………………………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。