高三数学试卷参考答案(文科)

1. D　因为 $iz=1-2i$,所以 $(iz)^2=(1-2i)^2$,即 $-z^2=-3-4i$,则 $z^2=3+4i$.

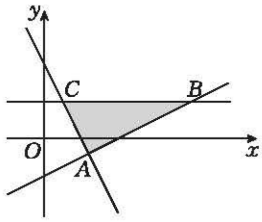
2. B　因为 $A=\{x|x<\frac{1}{4}\}$,$B=\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{4}{3}\}$,所以 $A\cup B=\{x|x<\frac{4}{3}\}$.

3. C　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8-6m=-10$,则 $m=3$,所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

4. B　因为 $m\perp\alpha$,$l\subset\alpha$,所以 $l\perp m$. 又 $\alpha\perp\beta$,所以 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$. 故选 B.

5. C　设参加体检的人数是 n,则 $\frac{4}{5}n-\frac{1}{5}n=72$,解得 $n=120$.

6. A　由题意可得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}(b^2+c^2-a^2)}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}bc\cos A$,所以 $\tan A=\sqrt{3}$,则 $A=\frac{\pi}{3}$.



7. C　画出可行域,如图所示,且 $A(\frac{6}{5},-\frac{2}{5})$,$B(4,1)$,$C(\frac{1}{2},1)$,$\frac{y}{x}$ 表示的是可行域内的点与原点 $O(0,0)$ 连线的斜率,故 $\frac{y}{x}\in[-\frac{1}{3},2]$.

8. A　因为 $f(x-1)$ 为偶函数,所以 $f(x-1)$ 的图象关于 y 轴对称,则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称. 因为 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减. 因为 $f(1-2^x)<f(-7)$,所以 $-7<1-2^x<5$,解得 $x<3$.

9. C　因为 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{12})+\cos(\alpha+\frac{7\pi}{12})=\frac{1}{5}$,所以 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{12})-\sin(\alpha+\frac{\pi}{12})=\frac{1}{5}$,所以 $1-\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{25}$,则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{24}{25}$,故 $\cos(2\alpha+\frac{2\pi}{3})=-\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{24}{25}$.

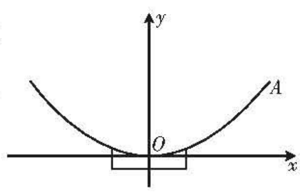
10. D　$g(x)=f(x+\frac{\pi}{4})=2\sin[2(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{3}]=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$,令 $\pi+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2\pi+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

11. B　因为球 O_1 的体积为 $\frac{4\pi}{3}$,所以球 O_1 的半径为 1,又球 O_1 与正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有面都相切,所以正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面内切圆的半径为 1,高为 2,则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的半径为 $\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$,即外接球的表面积为 20π.

12. C　若 $x\in(0,+\infty)$,则 $ex\in(0,+\infty)$,所以函数 $f(ex)=(ex)^2e^{ex}-\ln(ex)=x^2e^{ex+2}-(1+\ln x)$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等,因为 $g(x)=f(ex)+1$,所以 $g(x)$ 的最小值为 $m+1$.

13. 5　因为 $f'(x)=5\cos x-3\sin x$,所以 $f'(0)=5$.

14. $\frac{27}{8}$　如图,以抛物线的顶点为坐标原点,对称轴为 y 轴,建立直角坐标系,依题意可得 A 的坐标为 $(\frac{9}{2},3)$. 设抛物线的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$,则 $\frac{81}{4}=6p$,解得 $p=\frac{27}{8}$. 故该抛物线的焦点到准线的距离为 $\frac{27}{8}$ cm.



15. $\frac{3}{5}$　记另外 3 人为 a,b,c,从这 5 人中任意选出 2 人,总事件包括(甲,乙),(甲,a),(甲,b),(甲,c),(乙,a),(乙,b),(乙,c),(a,b),(a,c),(b,c),共 10 种情况,其中甲、乙 2 人中恰有 1 人被选中的事件包括(甲,a),(甲,b),(甲,c),(乙,a),(乙,b),(乙,c),共 6 种情况,故所求的概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

16. $\frac{\sqrt{13}+1}{3}$　设双曲线 E 的右焦点为 F_2，连接 NF_2（图略），因为$\triangle OMF$ 是等边三角形，所以 $|MF|=|OF|=c$，$\angle OFM=60°$. 又 $|MN|=|NF|$，所以 $|NF|=\frac{c}{2}$. 在$\triangle FNF_2$ 中，$|NF_2|^2=|NF|^2+|FF_2|^2-2|NF|\cdot|FF_2|\cos\angle NFF_2=\frac{13}{4}c^2$，则 $|NF_2|=\frac{\sqrt{13}}{2}c$，则 $2a=|NF_2|-|NF|=\frac{\sqrt{13}-1}{2}c$，则 $\frac{c}{a}=\frac{4}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}$.

17. 解：(1)当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1-1$，解得 $a_1=1$. ………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，则 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，………… 3 分

从而$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，………… 4 分

故 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$. ………… 6 分

(2)由(1)可得 $a_{n+1}=2^n$，则 $b_n=2^{n-1}+n$，………… 8 分

故 $T_n=(1+1)+(2+2)+(2^2+3)+\cdots+(2^{n-1}+n)$

$=(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+(1+2+3+\cdots+n)$

$=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{(1+n)n}{2}=\frac{2^{n+1}+n^2+n-2}{2}$. ………… 12 分

18. 解：(1)$x=\frac{10+20+30+40+50}{5}=30$，$y=\frac{2+3+7+8+10}{5}=6$. ………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-x)(y_i-y)=210$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-x)^2=1000$，………… 4 分

则 $\hat{b}=\frac{210}{1000}=0.21$，$\hat{a}=y-\hat{b}x=-0.3$. ………… 6 分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.21x-0.3$. ………… 7 分

(2)将 $x=60$ 代入 $\hat{y}=0.21x-0.3$，得到 $\hat{y}=12.3$，………… 9 分

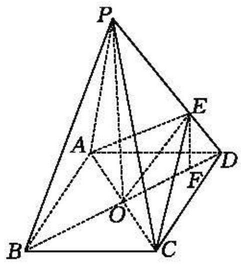
则估计 1000 粒赤霉素含量为 60 ng/g 的种子中后天生长苗壮的数量为 $1000\times\frac{12.3}{20}=615$. ………… 12 分

19. (1)证明：记 $AC\cap BD=O$，连接 OP，则 O 是 BD，AC 的中点. ………… 1 分

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$. ………… 2 分

因为 $PA=PC$，且 O 是 AC 的中点，所以 $OP\perp AC$. ………… 3 分

因为 OP，$BD\subset$平面 PBD，且 $OP\cap BD=O$，所以 $AC\perp$平面 PBD. ………… 4 分



(2)解：连接 OE. -公众号：网课来了-

因为 $PB=PD$，且 O 是 BD 的中点，所以 $OP\perp BD$.

因为 $OP\perp AC$，AC，$BD\subset$平面 $ABCD$，且 $AC\cap BD=O$，所以 $OP\perp$平面 $ABCD$. ………… 5 分

因为 $AB=2$，$\angle ABC=60°$，所以 $AC=2$，$OB=\sqrt{3}$，则 $OP=\sqrt{3}$.

故三棱锥 $P-ACD$ 的体积 $V_{P-ACD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$.

因为 $2\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{PE}$，所以 $V_{P-ACE}=\frac{2}{3}V_{P-ACD}=\frac{2}{3}$. ………… 7 分

过点 E 作 $EF\perp BD$，垂足为 F，

由题中数据可得 $EF=\frac{1}{3}OP=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$OF=\frac{2}{3}OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $OE=\frac{\sqrt{15}}{3}$. ………… 8 分

因为 $OE\subset$平面 PBD，且 $AC\perp$平面 PBD，所以 $AC\perp OE$，………… 9 分

则△ACE的面积$S=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{15}}{3}$. …………10分

设点P到平面ACE的距离为d,则$V_{P-ACE}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{3}d=\frac{2}{3}$,解得$d=\frac{2\sqrt{15}}{5}$. …………12分

20. 解:(1)因为$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{x^2+2a}{2x^2}=\frac{-x^2+2x-2a}{2x^2}$,且$f(x)$在$(3,+\infty)$上不单调, …………1分

所以关于x的方程$-x^2+2x-2a=0$在$(3,+\infty)$上有根,…………4分

所以$-3^2+2\times3-2a>0$,所以$a<-\frac{3}{2}$,即a的取值范围是$(-\infty,-\frac{3}{2})$. …………6分

(2)因为$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x+\frac{a}{x}\leqslant0$,所以$a\leqslant\frac{1}{2}x^2-x\ln x$. …………7分

令$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x\ln x$,则$g'(x)=x-\ln x-1$.

令$h(x)=x-\ln x-1$,则$h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, …………8分

可知$h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以$h(x)_{\min}=h(1)=0$,所以$h(x)=g'(x)\geqslant0$, …………10分

所以$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以$g(x)_{\min}=g(1)=\frac{1}{2}$,

所以$a\leqslant\frac{1}{2}$,即a的取值范围是$(-\infty,\frac{1}{2}]$. …………12分

21. 解:(1)由椭圆的对称性可知$M_1(-2,-2)$,$M_3(2,2)$,$M_4(\sqrt{10},1)$在椭圆C上. …………1分

由题意可得$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\\ \frac{10}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=12,\\ b^2=6.\end{cases}$ …………3分

故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$. …………4分

(2)当直线l的斜率不存在时,直线l的方程为$x=-2$,则不妨令$P(-2,2)$,$Q(-2,-2)$.

因为$M_3(2,2)$,所以$k_{M_3P}=0$,$k_{M_3Q}=1$,故$k_{M_3P}+k_{M_3Q}=1$. …………6分

当直线l的斜率存在时,设直线l的方程为$y=k(x+2)-4$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}y=k(x+2)-4,\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1,\end{cases}$整理得$(2k^2+1)x^2+8k(k-2)x+8k^2-32k+20=0$, …………7分

则由$\Delta>0$,得$4k^2+8k-5>0$,$x_1+x_2=-\frac{8k(k-2)}{2k^2+1}$,$x_1x_2=\frac{8k^2-32k+20}{2k^2+1}$. …………8分

因为$k_{M_3P}=\frac{y_1-2}{x_1-2}$,$k_{M_3Q}=\frac{y_2-2}{x_2-2}$,

所以$k_{M_3P}+k_{M_3Q}=\frac{y_1-2}{x_1-2}+\frac{y_2-2}{x_2-2}=\frac{kx_1+2k-6}{x_1-2}+\frac{kx_2+2k-6}{x_2-2}$

$=\frac{(kx_1+2k-6)(x_2-2)+(kx_2+2k-6)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2kx_1x_2-6(x_1+x_2)-8k+24}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$=\frac{2k(8k^2-32k+20)+6[8k(k-2)]-(8k-24)(2k^2+1)}{8k^2-32k+20+2[8k(k-2)]+4(2k^2+1)}=\frac{8(4k^2-8k+3)}{32k^2-64k+24}=1$. …………11分

综上,直线M_3P,M_3Q的斜率之和是定值,且该定值为1. …………12分

22. 解:(1)由$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=1+\sqrt{2}\sin\alpha,\end{cases}$消去参数$\alpha$,得$(x-1)^2+(y-1)^2=2$,即$x^2+y^2-2x-2y=0$, …………2分

则曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$. ………………………………………… 3 分

令 $\theta=0$,则 $\rho=2$,故点 A 的极坐标为 $(2,0)$. ………………………………………… 5 分

(2)令 $\theta=\frac{\pi}{3}$,则 $\rho=1+\sqrt{3}$, ………………………………………………………… 7 分

故$\triangle OAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times2\times(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. ……………… 10 分

23. 解:(1)因为 $a=2$,所以 $f(x)=|x+2|+|x-3|$.

当 $x\geqslant3$ 时,原不等式转化为 $2x-1\geqslant2x$,无解. ……………………………………… 1 分

当 $-2<x<3$ 时,原不等式转化为 $5\geqslant2x$,解得 $-2<x\leqslant\frac{5}{2}$. ……………………………… 2 分

当 $x\leqslant-2$ 时,原不等式转化为 $-2x+1\geqslant2x$,解得 $x\leqslant-2$. ……………………………… 3 分

综上所述,原不等式的解集为 $(-\infty,\frac{5}{2}]$. ………………………………………………… 5 分

(2) $|x+a|+|x-3|\geqslant|a+3|$. ………………………………………………………………… 7 分

由不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}a+5$ 的解集非空,可得 $|a+3|\leqslant\frac{1}{2}a+5$, ………………………… 8 分

则 $-\frac{1}{2}a-5\leqslant a+3\leqslant\frac{1}{2}a+5$, ………………………………………………………… 9 分

解得 $-\frac{16}{3}\leqslant a\leqslant4$,故 a 的取值范围为 $[-\frac{16}{3},4]$. ………………………………………… 10 分