



新余市 2022-2023 学年度下学期全市期末统考

高二数学 参考答案

一、单项选择题

1. 【答案】B

2. 【答案】A

3. 【答案】B

4. 【答案】A

5. 【答案】D

6. 【答案】C

7. 【答案】D

8. 【答案】D 解析：设 $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 (x \in \mathbb{R})$ ，所以 $f'(x) = e^x - x - 1$ ，

利用基本结论 $e^x \geq x + 1$ ，所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，

又因为 $f(0) = 0$ ，所以 $f(\sqrt{2}) = e^{\sqrt{2}} - 2 - \sqrt{2} > 0$ ，

所以 $e^{\sqrt{2}} > 2 + \sqrt{2}$ ，所以 $a > b$ ；

设 $g(x) = x - \ln x - \ln 6$ ， $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减；

当 $x > 1$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增。

因为 $g(3) = 3 - \ln 3 - \ln 6 = 3 - \ln 18 = \ln e^3 - \ln 18 > \ln 2.7^3 - \ln 18 > 0$ ，

所以 $g(2 + \sqrt{2}) > g(3) > 0$ ，即有 $2 + \sqrt{2} - \ln(2 + \sqrt{2}) - \ln 6 > 0$ ， $2 + \sqrt{2} > \ln(12 + 6\sqrt{2})$

所以 $b > c$ 。

二、多项选择题

9. 【答案】AC

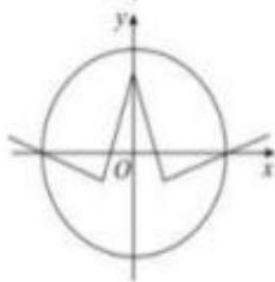
10. 【答案】CD

11. 【答案】ACD

12. 【答案】AD



【解析】对于 B：如下图所示：函数 $y=g(x)$ 为偶函数，也是圆 O 的太极函数，



如图所示：

故 B 错误；对于 C：根据选项 B 的分析，圆 O 的太极函数也可以为偶函数，故 C 错误。

三、填空题

13. 【答案】 5.5

14. 【答案】 $(-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$

15. 【答案】 -2

16. 【答案】 2, 2^{n-1}

四、解答题

17.

解：(1) $a=3$ 时， $B=\{x|4 \leq x \leq 8\}$ ，由图知， $M=(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$ ，_____ (2分)

因为 $A=\{x|-1 < x < 6\}$ ，所以 $\complement_{\mathbb{R}} A=\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 6\}$ ，_____ (4分)

所以 $M=\{x|6 \leq x \leq 8\}$ ，_____ (5分)

(2) 当 $B=\emptyset$ 时， $3a-1 < a+1$ ，解得 $a < 1$ ，此时 $B \subseteq A$ 成立；_____ (6分)

当 $B \neq \emptyset$ 时， $3a-1 \geq a+1$ ，解得 $a \geq 1$ ，_____ (7分)

因为 $B \subseteq A$ ，所以 $\begin{cases} a+1 > -1 \\ 3a-1 < 6 \end{cases}$ ，解得 $-2 < a < \frac{7}{3}$ ，

所以 $1 \leq a < \frac{7}{3}$ ；_____ (9分)

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{7}{3})$ 。_____ (10分)

18.

解：(1) 由题意设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，

因为椭圆经过点 $(\sqrt{2}, 0)$ 且短轴长为 2，所以 $a=\sqrt{2}, b=1$ ，_____ (3分)

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. _____ (5 分)

由已知得直线 l 的方程为 $y = x - 1$, _____ (7 分)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 将直线 $y = x - 1$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

得 $3x^2 - 4x = 0$, _____ (9 分)

所以 $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1 x_2 = 0$,

所以 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1+1^2} \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times 0} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. _____ (12 分)

19.

(1) 证明: 因为 $PA \perp$ 底面 ABCD, 所以 $PA \perp BC$,

因为 ABCD 为正方形, 所以 $AB \perp BC$, _____ (2 分)

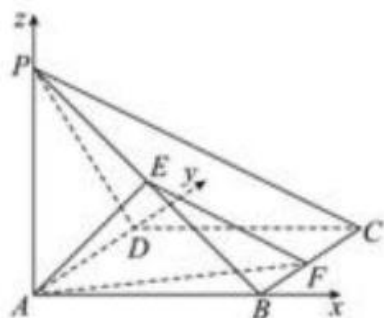
因为 $PA \cap AB = A$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAB, _____ (3 分)

所以 $BC \perp AE$.

因为 $PA = DC = AB$, E 为线段 PB 的中点, 所以 $AE \perp PB$. _____ (5 分)

因为 $PB \cap BC = B$, 所以 $AE \perp$ 平面 PBC. _____ (6 分)

(2) 解: 因为 $PA \perp$ 底面 ABCD, $AB \perp AD$, 所以以 A 为坐标原点, 建立如图示平面直角坐标系 A-xyz.



则 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$, 所以 $E(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, 设 $F(1, t, 0)$ ($t \in [0, 1]$), 则 $\overrightarrow{AF} = (1, t, 0)$,

易知平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 1, 0)$,



$$\text{所以 } \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{|\overrightarrow{AF} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{AF}| |\vec{m}|} = \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}, \text{ 得 } t = \frac{1}{2}; \text{ 所以 } F(1, \frac{1}{2}, 0); \text{ ————— (8分)}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AE} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), \overrightarrow{AF} = (1, \frac{1}{2}, 0), \text{ 设平面 AEF 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AF} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } \vec{n} = (-1, 2, 1). \text{ ————— (10分)}$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AP} = (0, 0, 1),$$

$$\text{所以点 P 到平面 AEF 的距离为 } d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}. \text{ ————— (12分)}$$

20.

解: (1)由题意, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } a_5 = 2 + 4d, a_3 = 2 + 2d, S_4 = 4 \times 2 + \frac{4 \times 3}{2}d = 8 + 6d,$$

设正项等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q, q > 0$, 则 $b_3 = 2q^2, b_2 = 2q$,

$$\text{由题意, 可得 } \begin{cases} 2 + 4d + 2q^2 = 8 + 6d \\ 2 + 2d + 2q = 8 \end{cases},$$

$$\text{化简得 } \begin{cases} q^2 - d = 3 \\ q + d = 3 \end{cases}, \text{ ————— (3分)}$$

$$\text{整理得 } q^2 + q - 6 = 0, \text{ 解得 } q = -3 (\text{舍去}), q = 2,$$

$$\therefore d = 3 - q = 3 - 2 = 1, \text{ ————— (5分)}$$

$$\therefore a_n = 2 + 1 \cdot (n - 1) = n + 1, n \in N^*,$$

$$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n, n \in N^*. \text{ ————— (6分)}$$

(2)选条件①:

$$c_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + 2^n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + 2^n, \text{ ————— (8分)}$$

$$\text{则 } T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2^1) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 2^2) + \dots + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + 2^n)$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) \text{ ————— (10分)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{2-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}. \text{ ————— (12分)}$$



选条件②:

$$c_n = a_n b_n = (n+1) \cdot 2^n,$$

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) \cdot 2^n,$$

$$2T_n = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1},$$

两式相减, 可得:

$$-T_n = 2 \cdot 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - (n+1) \cdot 2^{n+1} \quad \text{————— (10 分)}$$

$$= 4 + \frac{2^2 - 2^{n+1}}{1-2} - (n+1) \cdot 2^{n+1} = -n \cdot 2^{n+1}, \quad \text{————— (11 分)}$$

$$\therefore T_n = n \cdot 2^{n+1}. \quad \text{————— (12 分)}$$

选条件③:

$$c_n = \frac{a_n+2}{a_n a_{n+1} b_{n+1}} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+1}}, \quad \text{————— (9 分)}$$

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2^1} - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{4 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2^1} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+1}}. \quad \text{————— (12 分)}$$

21.

解: (1) 因为 $g(x)$ 为奇函数, 所以 $g(-x) = -g(x)$ 恒成立,

$$\text{即 } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+ax}{-x-1} = -\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1}, \quad \text{————— (1 分)}$$

$$\text{即 } \frac{1+ax}{-x-1} = \frac{x-1}{1-ax}, \text{ 解得 } a = \pm 1, \quad \text{————— (2 分)}$$

经检验, $a=1$ 不合题意, 故 $a=-1$; ————— (3 分)

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x,$$

$$\text{令 } t = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ 由 } x \in [-3, 2], \text{ 所以 } t \in \left[\frac{1}{4}, 8\right], \quad \text{————— (5 分)}$$

$$\text{则 } h(t) = t^2 - t + 1, \text{ 其对称轴为 } t = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{2} \text{ 时, } h(t)_{\min} = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \text{ 当 } t = 8 \text{ 时, } h(t)_{\max} = h(8) = 57,$$



所以 $f(x)$ 值域为 $[\frac{3}{4}, 57]$, _____ (6分)

又因为函数 $y = f(x) + m$ 存在零点, 等价于方程 $m = -f(x)$ 有解,

所以实数 m 的取值范围是 $[-57, -\frac{3}{4}]$; _____ (7分)

(3) 由已知, $|f(x)| \leq 5$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $-5 \leq f(x) \leq 5$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,

化简得 $-6 \cdot 2^x - (\frac{1}{2})^x \leq a \leq 4 \cdot 2^x - (\frac{1}{2})^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, _____ (9分)

所以 $[-6 \cdot 2^x - (\frac{1}{2})^x]_{\max} \leq a \leq [4 \cdot 2^x - (\frac{1}{2})^x]_{\min}$, _____ (10分)

设 $t = 2^x$, 因为 $x \in [0, +\infty)$, 即得 $t \geq 1$, 记 $F(t) = -6t - \frac{1}{t}$, $G(t) = 4t - \frac{1}{t}$,

易得 $G(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $G(t)_{\min} = G(1) = 3$, 易得 $F(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $F(t)_{\max} = F(1) = -7$,

因此实数 a 的取值范围是 $[-7, 3]$. _____ (12分)

22.

解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - x$, $f'(x) = e^x - 1$, _____ (1分)

所以 $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, _____ (2分)

所以所求切线方程为 $y = 1$. _____ (3分)

(2) 因为 $f(x) = e^{ax} - x$, $x \in \mathbb{R}$, 所以 $f'(x) = ae^{ax} - 1$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 此时 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减; _____ (4分)

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -\frac{\ln a}{a}$, 此时 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty, -\frac{\ln a}{a})$	$-\frac{\ln a}{a}$	$(-\frac{\ln a}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

由上表可知, $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, -\frac{\ln a}{a})$,

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线