2023届高三冲刺卷(二)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】$A=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$，$B=\{x|x^2-5x-6\leqslant 0\}=\{x|(x+1)(x-6)\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$，$A\cap B=\{-1,2,5\}$，故选 A.

2.B 【解析】由$\frac{z-2\mathrm{i}}{z+2}=\mathrm{i}$，得 $z-2\mathrm{i}=\mathrm{i}(z+2)$，$z-2\mathrm{i}=\mathrm{i}z+2\mathrm{i}$，$z=\frac{4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{4\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{4\mathrm{i}-4}{2}=-2+2\mathrm{i}$，$|z|=2\sqrt{2}$.故选 B.

3.D 【解析】塔的偏移距离 $BC=AB\sin\theta$，设两座塔的塔高为 h，则根据倾斜角的正弦值分别为$\frac{7}{25}$，$\frac{9}{41}$，得两座塔的偏移距离差的绝对值为$\left|\frac{7}{25}h-\frac{9}{41}h\right|$，即$\left|\frac{7}{25}h-\frac{9}{41}h\right|=3.1$，$h=\frac{3.1}{\frac{7}{25}-\frac{9}{41}}$，塔顶到地面的距离 $AC=AB\cos\theta$，根据倾斜角的正弦值分别为$\frac{7}{25}$，$\frac{9}{41}$，得倾斜角的余弦值分别为$\frac{24}{25}$，$\frac{40}{41}$，两座塔的塔顶到地面的距离差的绝对值为$\left|\frac{24}{25}h-\frac{40}{41}h\right|=\frac{3.1}{\frac{7}{25}-\frac{9}{41}}\times\left(\frac{40}{41}-\frac{24}{25}\right)=0.8$，故选 D.

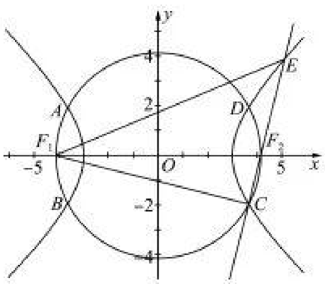
4.C 【解析】由 $\lg a_1$，$\lg a_3$，$\lg a_6$ 成等差数列，得 $2\lg a_3=\lg a_1+\lg a_6$，$\lg a_3^2=\lg a_1a_6$，$a_3^2=a_1a_6$，又 $a_3=a_1+2d$，$a_6=a_1+5d$，所以$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+5d)$，$a_1^2+4a_1d+4d^2=a_1^2+5a_1d$，$4d=a_1$，$\lg a_1$，$\lg a_3$，$\lg a_6$ 的公差为 $\lg a_3-\lg a_1=\lg\frac{a_3}{a_1}=\lg\frac{a_1+2d}{a_1}=\lg\frac{4d+2d}{4d}=\lg\frac{3}{2}$.故选 C.

5.A 【解析】由于甲校的学生成绩平均分低于乙校的学生成绩平均分，所以甲校的学生成绩正态曲线的对称轴比乙校的学生成绩的正态曲线的对称轴靠左；由于甲校的学生成绩的标准差大于乙校的学生成绩的标准差，所以甲校的学生成绩的正态曲线要"矮胖"些，乙校的学生成绩的正态曲线要"瘦高"些，故选 A.

6.A 【解析】若 m [illegible] α，n [illegible] α，则直线 m，n 可以平行，也可以相交，还可以异面；若 m [illegible] n，则存在平面 α，有 m [illegible] α，n [illegible] α，故 A 正确；若 m [illegible] α，n [illegible] α，则 m [illegible] n，即垂直于同一平面的两条直线平行；若 m [illegible] n，则存在平面 α，有 m [illegible] α，n [illegible] α，故 B 错误；若 m [illegible] l，n [illegible] l，则直线 m [illegible] n；若 m [illegible] n，则不存在直线 l，有 m [illegible] l，n [illegible] l，故 C 错误；若 m [illegible] l，n [illegible] l，则 m [illegible] n，因平行于同一直线的两直线平行，若 $m/\!/n$，则存在直线 l，有 m [illegible] l，n [illegible] l，故 D 错误.故选 A.

7.B 【解析】由于 $(x-2y)^5(x+y)=(x-2y)^5\cdot x+(x-2y)^5\cdot y$，所以 $(x-2y)^5(x+y)$ 的展开式中 x^5y 的系数是 $(x-2y)^5$ 展开式中 x^4y 的系数和 x^5 的系数和，$(x-2y)^5$ 的展开式中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-2y)^r=(-2)^rC_5^rx^{5-r}y^r$，分别令 $r=1$ 和 $r=0$，得到 $(x-2y)^5$ 的展开式中 x^4y 的系数 $(-2)^1C_5^1=-10$ 和 x^5 的系数 $(-2)^0C_5^0=1$，因此 $(x-2y)^5(x+y)$ 的展开式中 x^5y 的系数是 $-10+1=-9$.故选 B.

8.C 【解析】如图所示，设 $|CF_2|=m$，则 $|EF_2|=2m$，$|EC|=3m$ 连接 CF_1，EF_1，则由双曲线的定义，得 $|CF_1|=2a+m$，$|EF_1|=2a+2m$，由于点 C 在以 F_1F_2 为直径的圆上，所以 $CF_1\perp CF_2$，在直角三角形 ECF_1 中，$|CF_1|^2+|CE|^2=|EF_1|^2$，即 $(2a+2m)^2=(2a+m)^2+(3m)^2$，得 $m=\frac{2}{3}a$，在直角三角形 CF_1F_2 中，$|CF_1|^2+|CF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即 $(2a+m)^2+m^2=(2c)^2$，$\frac{c^2}{a^2}=\frac{17}{9}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}}{3}$.故选 C.



9.C 【解析】因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{36}$ 对称，所以 $-\omega\cdot\frac{\pi}{36}+\varphi=\frac{\pi}{2}+n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，根据$\frac{\pi}{18}<x<\frac{5\pi}{36}$，则$\frac{\omega\pi}{18}<\omega x<\frac{5\omega\pi}{36}$，$\frac{\omega\pi}{18}+\varphi<\omega x+\varphi<\frac{5\omega\pi}{36}+\varphi$，因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 是在区间$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上的单调减函数，

所以$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{18}+\varphi\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\\ \frac{5\omega\pi}{36}+\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{18}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\pi\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z},\\ \frac{5\omega\pi}{36}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\pi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{\omega}{18}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\geqslant\frac{1}{2}+2k,n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z},\\ \frac{5\omega}{36}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\leqslant\frac{3}{2}+2k,n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

$12(2k-n)\leqslant\omega\leqslant6(2k-n+1),n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{Z}$,

因为 $\omega>0$,所以 $2k-n=0$ 或 $2k-n=1$,当 $2k-n=0$ 时,$0<\omega\leqslant6$,当 $2k-n=1$ 时,$12\leqslant\omega\leqslant12$;

由于 $\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{9}<\frac{5\pi}{36}$,$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 是在区间 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 上的单调减函数,且 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{9}\right)=0$,

所以 $f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{9}\right)\right]=f\left(\frac{7\pi}{72}\right)=0$,所以 $\omega\times\frac{7\pi}{72}+\varphi=(2m+1)\pi,m\in\mathbf{Z},\omega\times\frac{7\pi}{72}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega}{36}+n\right)\pi=(2m+1)\pi,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$,

$\omega=8(2m-n)+4,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$,

根据 $0<\omega\leqslant6$ 或 $12\leqslant\omega\leqslant12$,可得 $\omega=4$,或 $\omega=12$,所以 ω 的最小值为 4.故选 C.

10.B 【解析】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

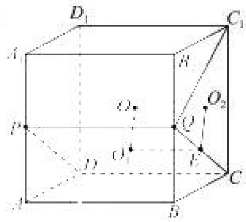
当直线 AB 的斜率不存在时,直线 AB 的方程为 $x=2$,代入 $y^2=4x$,得 $y^2=8,y=\pm2\sqrt{2},A(2,2\sqrt{2}),B(2,-2\sqrt{2}),|AF|=|BF|=\sqrt{1+8}=3,|AF|+|BF|=6$,与 $|AF|+|BF|=10$ 矛盾.

当直线 AB 的斜率存在时,设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$,代入 $y^2=4x$,得 $k^2x^2-(4k^2+4)x+4k^2=0$,则 $x_1+x_2=4+\frac{4}{k^2}$,

$x_1\cdot x_2=4$,由抛物线的定义知,$|AF|=x_1+1,|BF|=x_2+1$,于是 $|AF|+|BF|=x_1+1+x_2+1=4+\frac{4}{k^2}+2=10$,

所以 $k^2=1,|AF|\cdot|BF|=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=4+4+\frac{4}{k^2}+1=13$.故选 B.

11.D 【解析】根据正方体,得 $CD\perp CB,CD\perp C_1B$,所以 $CD\perp$ 平面 C_1QC,四边形 $PQCD$ 是矩形,其中



$CD=PQ$ [illegible],$CQ=PD$ [illegible] CQC [illegible] QC [illegible] $\cos\angle C_1CQ$ [illegible],

$\sin\angle C_1CQ$ [illegible],设 $\triangle C_1QC$ 的外接圆半径为 r,则 [illegible],于是 r [illegible],

设矩形 $PQCD$ 的外接圆半径为 m,则 $m=\frac{1}{2}CP$ [illegible],

设球心为 O,过 O 作 $OO_1\perp$ 平面 $PQCD$,垂足为 O_1,过 O 作 $OO_2\perp$ 平面 C_1QC,垂足为 O_2,则 O_1 是矩形 $PQCD$ 的外心,O_2 是三角形 C_1QC 的外心,取 CQ 中点 E,则 $O_2E\perp QC$,于是 $O_1E\perp$ 平面 C_1QC,所以四边形 OO_1EO_2 是矩形,设球半径为 R.

解法一:[illegible] $|OO_1|$ [illegible] $\frac{25}{16}$ [illegible] $\frac{41}{16}$,于是球的表面积为 $\frac{41}{4}\pi$,故选 D.

解法二:$O_2E=r\sin\angle O_2QE=r\cos\angle C_1CQ=\frac{5}{4}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4},OO_1=O_2E=\frac{\sqrt{5}}{4},R^2=m^2+|OO_1|^2=\frac{9}{4}+\frac{5}{16}=\frac{41}{16}$,于是球的表面积为 $\frac{41}{4}\pi$,故选 D.

12.B 【解析】由 $ae^{0.8}=0.8e^a,be^{1.2}=1.2e^b,ce^{1.6}=1.6e^c$,得 $\frac{a}{e^a}=\frac{0.8}{e^{0.8}},\frac{b}{e^b}=\frac{1.2}{e^{1.2}},\frac{c}{e^c}=\frac{1.6}{e^{1.6}}$,令 $f(x)=\frac{x}{e^x}$,则 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,

当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上是增函数,在 $(1,+\infty)$ 上是减函数,于是 $f(1.2)>f(1.6)$,即 $f(b)>f(c)$,又 $b,c\in(0,1)$,所以 $b>c$;

$\frac{a}{e^a}-\frac{c}{e^c}=\frac{0.8}{e^{0.8}}-\frac{1.6}{e^{1.6}}=\frac{0.8}{e^{0.8}}-\frac{0.8\times2}{e^{0.8}\times e^{0.8}}=\frac{0.8}{e^{0.8}}\times\frac{e^{0.8}-2}{e^{0.8}}$,因为 $5^4=625>2^9=512$,所以 $5^4>2^4\times2^5,\left(\frac{5}{2}\right)^4>2^5,\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4}{5}}>2$,

因此 $e^{0.8}-2>\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4}{5}}-2>0$,于是 $f(a)>f(c)$,又 $a,c\in(0,1)$,所以 $a>c$;

令 $g(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2-x}{e^{2-x}}$,则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}-\frac{1-x}{e^{2-x}}=(1-x)\cdot\frac{(e-e^x)(e+e^x)}{e^{x+2}}\geqslant0$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数,$g(0.8)<g(1)$,$\frac{0.8}{e^{0.8}}-\frac{2-0.8}{e^{2-0.8}}<0$,即 $\frac{0.8}{e^{0.8}}-\frac{1.2}{e^{1.2}}<0,\frac{0.8}{e^{0.8}}<\frac{1.2}{e^{1.2}}$,$f(0.8)<f(1.2)$,于是 $f(a)<f(b)$,又 $a,b\in(0,1)$,所以 $a<b$;

综上:$b>a>c$.故选 B.

13.2 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(1,-x),\boldsymbol{b}=(x,-3)$,得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1+x,-x-3),\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1-x,-x+3)$,因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线,

所以$(1+x)(-x+3)=(-x-3)(1-x)$，$x^2=3$，$|a|=\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+3}=2$.

14.$-\ln 3$　**【解析】**函数$f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$，$\ln(x+1)>0$，当$1<x\leqslant 2$时，$\ln(x-1)\leqslant 0$，$f(x)=-\ln(x-1)-\ln(x+1)=-\ln(x^2-1)$，$f(x)$在$(1,2)$上是减函数，当$x>2$时，$\ln(x-1)>0$，$f(x)=\ln(x-1)-\ln(x+1)=\ln\frac{x-1}{x+1}=\ln\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$，$f(x)$在$(2,+\infty)$上是增函数，因此当$x=2$时，$f(x)$有最小值$f(2)=-\ln 3$.

15.$\frac{6}{35}$　**【解析】**首先每种花各买1盆，然后再从4种花中任选4盆，可能1种花选4盆，有$C_4^1=4$种；可能2种花中，1种花选1盆，另1种花选3盆或者每种花各选2盆，有$C_4^2C_2^1+C_4^2=18$种；可能3种花中，1种花选2盆另外2种花各选1盆，有$C_4^1C_3^2=12$种；可能4种花各1盆，有$C_4^4=1$种，于是共有$C_4^1+3C_4^2+3C_4^3+C_4^4=35$种.若玫瑰花恰好种3盆，则在百合、牡丹和兰花中各选1盆后，再选2盆，共有$C_3^1+C_3^2=6$种，因此所求概率为$P=\frac{6}{35}$.

16.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　**【解析】**$f(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}-1$，对任意$x>0$，都有$f(x)>a\ln(x+1)$恒成立，即$\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}-1>a\ln(x+1)$，化简得$e^x-x-1-ax\ln(x+1)>0$，令$g(x)=e^x-x-1-ax\ln(x+1)$，于是对任意$x>0$，有$g(x)>0$，

$g'(x)=e^x-1-a\ln(x+1)-\frac{ax}{x+1}$，令$h(x)=e^x-1-a\ln(x+1)-\frac{ax}{x+1}$，则$h'(x)=e^x-a\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]$.

当$a\leqslant 0$时，$h'(x)>0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，于是$h(x)>h(0)=0$，即$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，于是$g(x)>g(0)=0$，符合题意.

当$a>0$时，观察易知$h'(x)$在[illegible]上是增函数，于是$h'(x)$[illegible]$1-2a$.

若[illegible]$\frac{1}{2}$，则$h'(x)$[illegible]，所以$h(x)$在[illegible]上是[illegible]函数[illegible]在[illegible]上是增函数，[illegible]$g(0)$[illegible]，符合题意.

若[illegible]$\frac{1}{2}$，令$m(x)$[illegible]$-x-1$，则[illegible]时，$m'(x)$[illegible]-1[illegible]$m(x)$在$(0,$[illegible]上是增函数，所以$m(x)$[illegible]$m(0)$[illegible]，即$e^x>$[illegible]

[illegible]，又$h'(0)$[illegible]$-2a$[illegible]，$h'(x)$在[illegible]上是增函数，所以存在[illegible]，使得h'[illegible]，当$x\in(0,$[illegible]时，$h'(x)$[illegible]，即$h(x)$在[illegible]上是减函数，当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)<h(0)=0$，即$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,x_0)$上是减函数，$g(x)<g(0)=0$，这与$g(x)>0$矛盾.故实数a的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

17.(1)**证明：**法一：由$\cos(A+2B)+\cos A=\sin 2B$得$\cos A\cos 2B-\sin A\sin 2B+\cos A=\sin 2B$，…………1分

所以$\cos A(1+\cos 2B)=(1+\sin A)\sin 2B$，所以$2\cos A\cos^2 B=2(1+\sin A)\sin B\cos B$，…………2分

因为$\triangle ABC$是斜三角形，所以$\cos B\neq 0$，

所以$\cos A\cos B=(1+\sin A)\sin B$，…………3分

所以$\cos A\cos B-\sin A\sin B-\sin B=0$，所以$\cos(A+B)-\sin B=0$，又$A+B+C=\pi$，

所以$\cos C+\sin B=0$.…………5分

法二：由$\cos(A+2B)+\cos A=\sin 2B$，得$\cos(A+2B)=\sin 2B-\cos A$，所以$\cos(A+B+B)=\sin 2B-\cos(A+B-B)$，…………1分

所以$\cos(A+B)\cos B-\sin(A+B)\sin B=\sin 2B-\cos(A+B)\cos B-\sin(A+B)\sin B$，…………2分

所以$2\cos(A+B)\cos B-2\sin B\cos B=0$，…………3分

因为$\triangle ABC$是斜三角形，所以$\cos B\neq 0$，所以$\cos(A+B)-\sin B=0$，又$A+B+C=\pi$，所以$\cos C+\sin B=0$.…………5分

(2)**解：**在$\triangle ABC$中，有$\sin B>0$，由(1)知$\cos C+\sin B=0$，所以$\cos C<0$，于是角C为钝角，角B为锐角，

根据$\cos C=\cos\left(\frac{\pi}{2}+B\right)$，所以$C=\frac{\pi}{2}+B$.…………7分

由正弦定理，得$\frac{4a^2+5b^2}{c^2}=\frac{4\sin^2A+5\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{4\sin^2(B+C)+5\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{4\sin^2\left(2C-\frac{\pi}{2}\right)+5\sin^2\left(C-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2C}$

$=\frac{4\cos^2(2C)+5\cos^2C}{\sin^2C}=\frac{4(1-2\sin^2C)^2+5-5\sin^2C}{\sin^2C}=\frac{16\sin^4C-21\sin^2C+9}{\sin^2C}=16\sin^2C+\frac{9}{\sin^2C}-21\geqslant2\sqrt{16\times9}-21=3$，

当且仅当$16\sin^2C=\frac{9}{\sin^2C}$，即$\sin^2C=\frac{3}{4}$，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$时等号成立， ………………………… 10分

又角C为钝角，所以$C=120°$时，等号成立，由$C=\frac{\pi}{2}+B$，得$B=30°$，由$A+B+C=180°$，得$A=30°$，因此$\frac{4a^2+5b^2}{c^2}$的最小值为3，此时三角形ABC的各个内角为$A=30°$，$B=30°$，$C=120°$. ………………………… 12分

18.解：(1)$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{5.27}{0.46}\approx11.46$， ………………………… 2分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=32.56-11.46\times2.82\approx0.24$， ………………………… 4分

y关于x的回归方程为$\hat{y}=11.46x+0.24$. ………………………… 5分

(2)当$y=50$时，$50=11.46x+0.24$，则$x\approx4.34$， ………………………… 7分

根据2020年人均年可配收入为3.218 9万元，以及$3.218\ 9\times(1+0.06)^5=3.218\ 9\times1.34\approx4.31<4.34$， ………… 8分

和$3.218\ 9\times(1+0.06)^6=3.218\ 9\times1.42\approx4.57>4.34$， ………………………… 9分

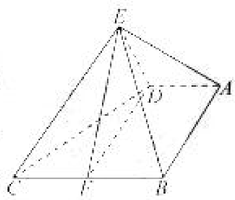
可得2025年[illegible]汽车拥有量可以达到50辆. ………………………… 10分

从2020年起，设每百户汽车拥有量平均每年的增长速度为x，则[illegible]

由于[illegible]1.516，所以$x\approx$[illegible]

即每百户汽车拥有量平均每年至少增长的速度为[illegible] ………………………… 12分

19.解：(1)当点F是BC的中点时，面$DEF\perp$面$ABCD$，证明如下：



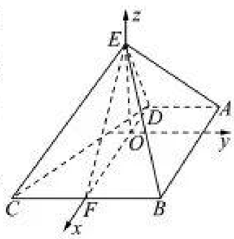
由点F是BC的中点，得$BF=\frac{1}{2}BC$，又$AD\parallel BC$，$BC=2AD$，所以$AD\parallel BF$，$AD=BF$，四边形$ABFD$是平行四边形， ………………………… 2分

根据$\angle BAD=\angle CBA=90°$，得四边形$ABFD$是矩形，故$BC\perp DF$， ………………………… 3分

因为$ED\perp$面EBC，$BC\subset$面EBC，所以$BC\perp ED$，因为$DF\cap ED=D$，DF，$ED\subset$面DEF，

于是$BC\perp$面DEF，由于$BC\subset$面$ABCD$，因此面$DEF\perp$面$ABCD$. ………………………… 5分

(2)因为面$DEF\perp$面$ABCD$，面$DEF\cap$面$ABCD=DF$，所以过点E作$EO\perp DF$于点O，则$EO\perp$面$ABCD$，以OF为x轴，以过点O所作DF的垂线为y轴，OE为z轴建立空间直角坐标系，如图所示，设$ED=AD=1$，则$AB=BC=2$，因为$ED\perp$面EBC，所以$ED\perp EF$，在Rt$\triangle DEF$中，根据$ED=1$，$DF=2$，可得$EF=\sqrt{3}$，$OD=\frac{1}{2}$，$OF=\frac{3}{2}$，$EO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$E\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$A\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$，$B\left(\frac{3}{2},1,0\right)$，



$C\left(\frac{3}{2},-1,0\right)$，$\overrightarrow{EB}=\left(\frac{3}{2},1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$， ………………………… 8分

设面EBC的法向量为$\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\frac{3}{2}a+b-\frac{\sqrt{3}}{2}c=0,\\ 2b=0,\end{cases}$

令$a=1$，则$c=\sqrt{3}$，$b=0$，所以$\boldsymbol{m}=(1,0,\sqrt{3})$，

设面EAB的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{3}{2}x+y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ 2x=0,\end{cases}$

令 $z=2$，则 $x=0$，$y=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},2)$. ………………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，设二面角 $A-EB-C$ 的大小为 θ，易知 $\theta>\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{21}}{7}$，

因此二面角 $A-EB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………… 12 分

20. **解**：(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，因为 $x>0$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，由 $f'(x)<0$，得 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，在 $(1,+\infty)$ 上是减函数，$f(x)$ 有极大值 $f(1)=-1$，无极小值. ………………………………………… 2 分

$g'(x)=\frac{e^x x^2-2xe^x}{(x^2)^2}=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$，因为 $x>0$，由 $g'(x)>0$，得 $x>2$，由 $g'(x)<0$，得 $0<x<2$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上是减函数，在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，$g(x)$ 有极小值 $g(2)=\frac{e^2}{4}$，无极大值. ………………………………………… 4 分

(2) 函数 $h(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$h(x)=af(x)+\frac{1}{xg(x)}=a(\ln x-x)+\frac{x}{e^x}$

$h'(x)=a\left(\frac{1}{x}-1\right)+\frac{1-x}{e^x}=a\cdot\frac{1-x}{x}+\frac{1-x}{e^x}=(1-x)\left(\frac{1}{e^x}+\frac{a}{x}\right)$. ………………………………………… 5 分

当 $a=0$ 时，$h(x)=\frac{x}{e^x}>0$，$h(x)$ 无零点； ………………………………………… 6 分

当 $a>0$ 时，$\frac{1}{e^x}+\frac{a}{x}>0$，令 $h'(x)>0$，得 $0<x<1$，令 $h'(x)<0$，得 $x>1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，在 $(1,+\infty)$ 上是减函数，$h(x)$ 有极大值 $h(1)=\frac{1}{e}-a$，

若 $\frac{1}{e}-a<0$，即 $a>\frac{1}{e}$ 时，$h(x)$ 无零点；………………………………………… 7 分

若 $\frac{1}{e}-a=0$，即 $a=\frac{1}{e}$ 时，$h(x)$ 只有一个零点；………………………………………… 8 分

若 $\frac{1}{e}-a>0$，即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$h(1)>0$，因为 [illegible]，由(1)知 $\ln x-x\leqslant-1$.

所以 $h(a)=\frac{a}{e^a}+a(\ln a-a)<\frac{a}{e^a}-a=a\left(\frac{1}{e^a}-1\right)<0$，根据 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，$h(1)>0$ 且 $a<1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一零点. ………………………………………… 9 分

由(1)知 $\frac{e^{\frac{1}{a}}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2}>\frac{e^2}{4}>1$ 以及 $\ln a-a<-1$，于是有 $\frac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}<a$ 和 $\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}<-1$，所以 $h\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}}{e^{\frac{1}{a}}}+a\left(\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)<a-a=0$，又因为 $h(1)>0$，$\frac{1}{a}>1$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点. ………………………………………… 10 分

当 $a<0$ 时，由(1)知，$\ln x-x\leqslant-1<0$，于是 $a(\ln x-x)>0$，而 $\frac{x}{e^x}>0$，所以 $h(x)>0$，$h(x)$ 无零点. ………………………………………… 11 分

因此 $a\leqslant0$ 或 $a>\frac{1}{e}$ 时，$h(x)$ 无零点，$a=\frac{1}{e}$ 时，$h(x)$ 只有一个零点，$0<a<\frac{1}{e}$ 时，$h(x)$ 有两个零点. ………………………………………… 12 分

21. (1) **证明**：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点 $A(0,b)$，右焦点 $F(c,0)$，$B\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(\frac{5}{3}-c,-\frac{4}{3}\right)$，$\overrightarrow{AF}=(c,-b)$，根据

$3\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$，得 $\begin{cases}5-3c=2c,\\-4=-2b,\end{cases}$ 所以 $b=2$，$c=1$，………………………………………… 3 分

$a^2=b^2+c^2=5$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$，因为 $\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{5}+\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}{4}=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=1$，所以点 $B\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$ 在椭圆上. ……… 5 分

(2) **解**：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，把 $y=kx+\frac{1}{k}$ 代入 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $(5k^2+4)x^2+10x+\frac{5}{k^2}-20=0$，

由 $\Delta=100-4(5k^2+4)\left(\frac{5}{k^2}-20\right)=80\left(5k^2+4-\frac{1}{k^2}\right)>0$，得 $k^2(5k^2+4)>1$，$x_1+x_2=-\frac{10}{5k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{\frac{5}{k^2}-20}{5k^2+4}$，$|PQ|=$

$\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\,\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\,\frac{4\sqrt{5}\sqrt{5k^2+4-\frac{1}{k^2}}}{5k^2+4}$. ………………………… 8 分

点 O 到直线 $y=kx+\frac{1}{k}$ 的距离 $d=\frac{\left|\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以△$OPQ$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|PQ|d=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+k^2}\,\frac{4\sqrt{5}\sqrt{5k^2+4-\frac{1}{k^2}}}{5k^2+4}\times\frac{\left|\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=$

$2\sqrt{5}\,\frac{\left|\frac{1}{k}\right|\sqrt{5k^2+4-\frac{1}{k^2}}}{5k^2+4}=2\sqrt{5}\sqrt{\frac{\left(5k^2+4-\frac{1}{k^2}\right)\frac{1}{k^2}}{(5k^2+4)^2}}=2\sqrt{5}\sqrt{\frac{(5k^2+4)k^2-1}{k^4(5k^2+4)^2}}$. ………………………… 10 分

令 $t=(5k^2+4)k^2$，则 $S=2\sqrt{5}\sqrt{\frac{t-1}{t^2}}=2\sqrt{5}\sqrt{-\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}}=2\sqrt{5}\sqrt{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\leqslant 2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\sqrt{5}$，

当 $\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$，即 $t=2$，$(5k^2+4)k^2=2$ 时，等号成立，此时满足 $\Delta>0$，因此△OPQ 的面积的最大值为 $\sqrt{5}$. ………………………… 12 分

22.解：(1)把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $x-7y+8=0$，得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-7\rho\sin\theta+8=0$； ………………………… 2 分

把 $x^2+y^2=\rho^2$，$x=\rho\cos\theta$ 代入 $x^2+y^2-4x=0$，得 $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，即曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. ………………………… 5 分

(2)联立 $\rho\cos\theta-7\rho\sin\theta+8=0$ 和 $\rho=4\cos\theta$，得 $4\cos\theta\cos\theta-28\cos\theta\sin\theta+8=0$，$\cos^2\theta-7\cos\theta\sin\theta+2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=0$，

$3\cos^2\theta-7\cos\theta\sin\theta+2\sin^2\theta=0$，即 $2\tan^2\theta-7\tan\theta+3=0$，$(2\tan\theta-1)(\tan\theta-3)=0$，所以 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\tan\theta=3$， ………………………… 8 分

即 A，B 两点所在的极角的正切值分别为 $\frac{1}{2}$ 和 3，于是 $\tan\angle AOB=|\tan(\theta_1-\theta_2)|=\left|\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}}\right|=1$，

所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$. ………………………… 10 分

23.解：(1)当 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 3$ 可化为 $x+x+1\geqslant 3$，$x\geqslant 1$，所以 $x\geqslant 1$；

当 $-1<x<0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 3$ 可化为 $-x+x+1\geqslant 3$，$1\geqslant 3$，不等式不成立； ………………………… 3 分

当 $x\leqslant -1$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 3$ 可化为 $-x-x-1\geqslant 3$，$x\leqslant -2$，所以 $x\leqslant -2$；

因此不等式 $f(x)\geqslant 3$ 的解集为 $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$. ………………………… 5 分

(2) $f(x)=|x|+|x+1|\geqslant|x-x-1|=1$，当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，等号成立，所以 $f(x)$ 的最小值为 1，于是 $m=1$，即 $a+b+c=1$，令

$a=x$，$b-1=y$，$c+2=z$，则 $a=x$，$b=y+1$，$c=z-2$，$a+b+c=x+y+1+z-2=x+y+z-1$，所以 $x+y+z=2$.

因为 $x^2+y^2\geqslant 2xy$，$y^2+z^2\geqslant 2yz$，$z^2+x^2\geqslant 2zx$，所以 $2x^2+2y^2+2z^2\geqslant 2xy+2yz+2zx$，两边同时加上 $x^2+y^2+z^2$，得 $3(x^2+y^2+z^2)\geqslant 2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2$， ………………………… 8 分

即 $3(x^2+y^2+z^2)\geqslant(x+y+z)^2$，$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{4}{3}$，所以当 $x=y=z=\frac{2}{3}$ 时，

$x^2+y^2+z^2$ 有最小值 $\frac{4}{3}$，即 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{5}{3}$，$c=-\frac{4}{3}$ 时，$a^2+(b-1)^2+(c+2)^2$ 有最小值 $\frac{4}{3}$. ………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。