绝密★启用前（新高考卷）

数学参考答案

1.【答案】A

【解析】易知 $A=\left\{x\middle|x^2-3x-4<0\right\}$，因为 $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$，所以 $A=(-1,4)$，

所以 $A\cup B=(-2,4)$.

2.【答案】C

【解析】因为 $|z_2|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，所以 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|=3\sqrt{5}$.

3.【答案】D

【解析】由题意可知，$\angle ABC=120^\circ$，则 $AC=\sqrt{16^2+24^2-2\times16\times24\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=8\sqrt{19}$.

4.【答案】C

【解析】因为 $|PO|=|PQ|=|PF|$，所以 $\frac{p}{2}=1\times2$，即 $p=4$，所以 F 到 l 的距离为4.

5.【答案】B

【解析】易知该石料底面内切圆半径为 $\sqrt{3}$，所以打磨而成的石球，与该石料的各个侧面均相切，

因为最多打磨成四个，所以该石料的高度最小值为 $8\sqrt{3}$，

所以该石料的体积 $V\geqslant\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}\times8\sqrt{3}=216$，

又四个石球的总体积 $V=4\times\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{3})^3=16\sqrt{3}\pi$，所以至少需要打磨掉的体积为 $216-16\sqrt{3}\pi$.

6.【答案】B

【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta=1$，

即 $\cos(\theta-\varphi)=1$，其中 $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，所以 $\theta-\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $\tan\theta=\tan\varphi=\sqrt{2}$.

【另解】易解得 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3},\sin\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\tan\theta=\sqrt{2}$.

7.【答案】D

【解析】设甲组数据为$a_1,a_2,\cdots,a_6$，乙组数据为$b_1,b_2,\cdots,b_6$，

则$\sum\limits_{i=1}^{6}a_i=18,\sum\limits_{i=1}^{6}(a_i-3)^2=30,\sum\limits_{i=1}^{6}b_i=30,\sum\limits_{i=1}^{6}(b_i-5)^2=18$，

所以新的一组数据的平均数为$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}a_i+\sum\limits_{i=1}^{6}b_i}{12}=4$，

所以新数据的方差$s^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(a_i-4)^2+\sum\limits_{i=1}^{6}(b_i-4)^2}{12}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(a_i-3)^2+6+\sum\limits_{i=1}^{6}(b_i-5)^2+6}{12}=5$.

8.【答案】C

【解析】由条件得直线AB的斜率$k=\dfrac{y_1-1}{x_1}$，

设$C(0,t)$，直线CB的斜率$k_1=\dfrac{y_1-t}{x_1}$，

又因为$AB\perp CB$，所以$k_1\cdot k=\dfrac{(y_1-1)(y_1-t)}{x_1^2}=-1$，即$(y_1-1)(y_1-t)=-x_1^2$，

又因为B在椭圆上，所以$\dfrac{x_1^2}{3}+y_1^2=1$，即$-x_1^2=3(y_1^2-1)$，

所以$(y_1-1)(y_1-t)=3(y_1^2-1)$，又因为$y_1\neq1$，则消去$y_1-1$，解得$t=-2y_1-3$，

即点C坐标为$C(0,-2y_1-3)$，所以$|BC|=\sqrt{x_1^2+(3y_1+3)^2}$，

将$x_1^2=-3(y_1^2-1)$代入，整理得$|BC|=\sqrt{6y_1^2+18y_1+12}=2\sqrt{3}$，

解得$y_1=0$，即$B(\sqrt{3},0)$，所以$k=\dfrac{0-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

9.【答案】AC

【解析】因为$q>0$，所以$T_6=a_1^6q^{15}>0$，

又$T_7>T_6>T_8$，所以$a_7>1>a_7a_8$，所以$a_7>1>a_8$，即$0<q<1$

即A正确，B错误；

因为$a_7>1$，所以$T_{13}=a_7^{13}>1$，

因为 $a_7a_8<1$，所以 $T_{14}=\left(a_7a_8\right)^7<1$，即 C 正确，D 错误.

10.【答案】AC

【解析】因为 $-\frac{15}{4}\leqslant\omega\leqslant-3$，所以 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}\in\left[\frac{8\pi}{15},\frac{2\pi}{3}\right]$，即 A 正确；

因为 $-\frac{\pi}{3}+\frac{T}{4}\geqslant-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{15}=-\frac{\pi}{5}<-\frac{\pi}{6}$，

$f(x)$ 图象关于点 $(-\frac{\pi}{3},0)$ 对称

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 上不是单调递增，即 B 错误；

因为 $\frac{7\pi}{10}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{31\pi}{30}$，且 $\frac{3}{2}T\leqslant\pi<\frac{31\pi}{30}$，$2T\geqslant\frac{16\pi}{15}>\frac{31\pi}{30}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的图象不可能关于点 $\left(\frac{7\pi}{10},0\right)$ 对称，即 C 正确；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\omega x+\varphi\in\left(\frac{\omega\pi}{2}+\varphi,\varphi\right)$，

又 $\frac{\omega\pi}{2}+\varphi<-\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}=-\pi<-\frac{\pi}{2}$，且 $\varphi>-\frac{\pi}{2}$

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内存在极小值，即 D 错误.

11.【答案】ACD

【解析】由对称性可知，$|F_1B|=|F_2A|$，所以 $|F_1A|+|F_1B|=|F_1A|+|F_2A|=2a=4\sqrt{2}$，即 A 正确；

设 $B\left(x,y\right),A\left(-x,y\right)$，则 $x,y>0$，$x=t$，且 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，

所以 $\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=\left(-x+2,y\right)\cdot\left(x+2,y\right)=4-x^2+y^2=4-x^2+4-\frac{x^2}{2}=0$，

解得 $x=t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即 B 错误；

易知 $S=xy$，又 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\geqslant2\frac{xy}{\sqrt{32}}=\frac{xy}{2\sqrt{2}}$，所以 $S=xy\leqslant2\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\sqrt{2}y$ 时，上述等号成立，即 C 正确；

设 $|F_1A|=m,|F_2A|=n$，则 $m+n=4\sqrt{2}$，

由余弦定理，可知 $|F_1F_2|^2=16=m^2+n^2-mn=32-3mn$，所以 $mn=\dfrac{16}{3}$，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}mn\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot y=2y=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，即 $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

代入椭圆，解得 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $S=xy=\dfrac{8}{3}$，即 D 正确.

12.【答案】ACD

【解析】$f'(x)=\dfrac{-x}{e^{x-1}}-a$，则 $(f'(x))'=\dfrac{x-1}{e^{x-1}}$，令 $(f'(x))'=0$，解得 $x=1$，

易知 $f'(x)_{\min}=f'(1)=-1-a$，

若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $-1-a\geqslant 0$，所以 $a\leqslant -1$，即 A 正确；

因为 $0<a<2$，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{-x}{e^{x-1}}-a<0$，

又 $f'(-1)=e^2-a>0$，所以存在 $x_0\in(-1,0)$，使得 $f'(x_0)=0$，

易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(-1)=a-1$，$f(1)=1-a$，

因为 $f(m)=f(n)=a-1$，所以 $m=-1$，

则当 $1<a<2$ 时，$f(1)<f(-1)$，所以 $n<1$，所以 $n-m<2$，即 B 错误；

由 B 项过程可知，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 仅有一个极值点，不符题意，

当 $a<0$ 时，易知 $f'(x)=\dfrac{-x}{e^{x-1}}-a>0$ 在 $(-\infty,0]$ 上恒成立，

且当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to -a>0$，

由 A 项过程可知，$f'(x)_{\min}=f'(1)=-1-a$，所以 $-1-a<0$，即 $-1<a<0$，

此时存在 $x_1\in(0,1),x_2\in(1,+\infty)$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，

即 $\dfrac{x_1}{e^{x_1-1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2-1}}=-a$，设 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>2$，

所以 $\frac{x_1}{e^{x_1-1}}=\frac{tx_1}{e^{tx_1-1}}$，解得 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}(t>2)$，

设 $g(t)=\frac{\ln t}{t-1}(t>2)$，由 $\ln x\leqslant x-1$ 可知，$g'(t)=\frac{\frac{t-1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}=\frac{\ln\frac{1}{t}-\left(\frac{1}{t}-1\right)}{(t-1)^2}\leqslant 0$，

所以 $g(t)$ 单调递减，且 $g(2)=\ln 2, g(t)>0$，所以 $x_1\in(0,\ln 2)$，

所以 $f'(\ln 2)=\frac{-e\ln 2}{2}-a<0$，所以 $a\in\left(-\frac{e\ln 2}{2},0\right)$，即 C 正确；

当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{x+1}{e^{x-1}}-x-1$，则 $f'(x)=\frac{-x}{e^{x-1}}-1$，设切点为 $(t,f(t))$，

则切线方程为 $y=\left(\frac{-t}{e^{t-1}}-1\right)(x-t)+\frac{t+1}{e^{t-1}}-t-1=\left(\frac{-t}{e^{t-1}}-1\right)x+\frac{t^2+t+1}{e^{t-1}}-1$，

因为切线过 $(0,3)$，所以 $\frac{t^2+t+1}{e^{t-1}}-1=3$，即 $\frac{t^2+t+1}{e^{t-1}}=4$，

设 $h(t)=\frac{t^2+t+1}{e^{t-1}}$，则 $h'(t)=\frac{t-t^2}{e^{t-1}}$，令 $h'(t)=0$，解得 $t=0$ 或 $t=1$，

易知 $h(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以当 $t\geqslant 0$ 时，$h(t)\leqslant h(1)=3<4$，

又 $h(-1)=e^2>4$，所以存在唯一的 $t\in(-1,0)$，使得 $h(t)=4$，

所以过 $(0,3)$ 仅能做曲线 $y=f(x)$ 的一条切线，即 D 正确.

13.【答案】9

【解析】A 选的是偶数号球衣的不同选法种数是 C_3^1，B 只能从剩下的三件球衣中选取，有 C_3^1 种不同选法，

所以 A，B 所选球衣中 A 选的是偶数号球衣的不同选法为 $C_3^1C_3^1=9$.

14.【答案】$6+4\sqrt{2}$

【解析】因为直线过 $(2,1)$，所以 $2a+2b=1$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(2a+2b)=6+\frac{2b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 6+4\sqrt{2}$，

当且仅当$b=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}$时，上述等号成立.

15.【答案】$\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$

【解析】因为切线长为$\sqrt{2}$，所以$PM=\sqrt{\sqrt{2}^2+1}=\sqrt{3}$，

所以圆C与以M为圆心，以$\sqrt{3}$为半径的圆有公共点，

又$OM=2$，所以$\left|r-\sqrt{3}\right|\leqslant 2\leqslant r+\sqrt{3}$，解得$r\in\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$.

16.【答案】$\left[-\dfrac{2}{\mathrm{e}},0\right)$

【解析】设公切线与曲线$y=f(x)$的切点为$\left(x_1,\dfrac{a}{x_1}\right)$，与曲线$y=g(x)$的切点为$\left(x_2,2\ln x_2\right)$，

因为$f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}$，$g'(x)=\dfrac{2}{x}$，

所以$y=f(x)$在$x=x_1$处的切线方程为$y=\left(-\dfrac{a}{x_1^2}\right)(x-x_1)+\dfrac{a}{x_1}=\left(-\dfrac{a}{x_1^2}\right)x+\dfrac{2a}{x_1}$，

同理可得，$y=g(x)$在$x=x_2$处的切线方程为$y=\dfrac{2}{x_2}x+2\ln x_2-2$，

由题意可知，$\begin{cases}-\dfrac{a}{x_1^2}=\dfrac{2}{x_2}\\ \dfrac{2a}{x_1}=2\ln x_2-2\end{cases}$，即$\begin{cases}\dfrac{a}{x_1^2}=-\dfrac{2}{x_2}\\ \dfrac{a}{x_1}=\ln x_2-1\end{cases}$，

因为$\dfrac{a}{x_1^2}=-\dfrac{2}{x_2}<0$，所以$a<0$，所以$\dfrac{a}{x_1}=\ln x_2-1<0$，即$\ln x_2<1$，

消去x_1，整理得$a=-\dfrac{x_2\left(\ln x_2-1\right)^2}{2}$，

设$\ln x_2=t<1$，$a(t)=-\dfrac{(t-1)^2\mathrm{e}^t}{2}$，则$a'(t)=-\dfrac{\left(t^2-1\right)\mathrm{e}^t}{2}$，

令$a'(t)=0$，解得$t=-1$，易知$a(t)_{\min}=a(-1)=-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，

又 $a(1)=0$，所以 $a\in\left[-\frac{2}{e},0\right)$.

17.【解析】(1) 因为 $A=\frac{\pi}{3}$，且 $a+b+c=6$，

所以 $a^2=[6-(b+c)]^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$，……（2分）

展开整理得 $bc+12=4(b+c)$，命题得证；……（4分）

(2) 因为 $bc+12=4(b+c)\geqslant 8\sqrt{bc}$，所以 $\left(\sqrt{bc}\right)^2-8\sqrt{bc}+12\geqslant 0$，……（5分）

所以 $\sqrt{bc}\leqslant 2$ 或 $\sqrt{bc}\geqslant 6$，即 $bc\le 4$ 或 $bc\ge 36$，……（6分）

又 $bc+12=4(b+c)<24$，所以 $bc<12$，所以 $bc\leqslant 4$，当且仅当 $b=c=2$ 时，等号成立，

……（8分）

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ ……（10分）

18.【解析】(1) 因为 $a_2=2$，所以 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=a_2-a_1=1$，……（2分）

所以 $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$；……（6分）

(2) 设 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 的公比为 q，

因为 $a_{n+2}+a_n=a_2\cdot a_{n+1}$，所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}=\left(a_2-\frac{5}{2}\right)a_{n+1}$，……（8分）

所以 $\left(q-\frac{1}{2}\right)(a_{n+1}-a_n)=\left(a_2-\frac{5}{2}\right)a_{n+1}$，即 $\left(q-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=a_2-\frac{5}{2}$，……（10分）

因为 $\{a_n\}$ 不为等比数列，所以 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 不是常数，所以 $q=\frac{1}{2},a_2=\frac{5}{2}$，……（12分）

19.【解析】(1) 设妻子驾车的天数为随机变量 X，则 X 可能取值为 $0,1,2$，则

$P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{32}$，$P(X=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{19}{32}$，

$P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$，……（3 分）

则 $E(X)=0\times\frac{1}{32}+1\times\frac{19}{32}+2\times\frac{3}{8}=\frac{43}{32}$；……（5 分）

（2）【方法一】易知 $p_1=\frac{1}{2},p_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$，且 $p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{4}p_{n-1}(n\geqslant2)$，

所以 $p_{n+1}-p_n=-\frac{3}{4}(p_n-p_{n-1})(n\geqslant2)$，……（8 分）

又 $p_2-p_1=\frac{1}{8}$，所以 $p_n-p_{n-1}=\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-2}$，……（10 分）

由累加法可知，$p_n=\frac{4}{7}-\frac{1}{14}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant60)$ ……（12 分）

【方法二】根据题意有，$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+(1-p_n)=-\frac{3}{4}p_n+1$，……（7 分）

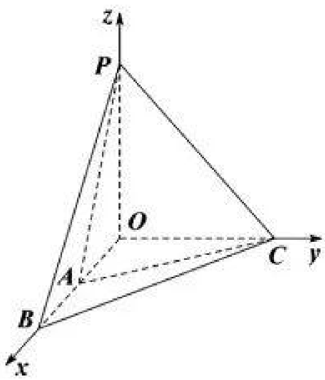
即 $p_{n+1}-\frac{4}{7}=-\frac{3}{4}(p_n-\frac{4}{7})$，……（8 分）

设 $a_n=p_n-\frac{4}{7}$，则 $a_1=p_1-\frac{4}{7}=-\frac{1}{14}$，……（9 分）

所以 $a_n=(-\frac{1}{14})\cdot(-\frac{3}{4})^{n-1}=p_n-\frac{4}{7}$，……（11 分）

故 $p_n=\frac{4}{7}-\frac{1}{14}\cdot(-\frac{3}{4})^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant60)$ ……（12 分）

20.【解析】（1）如图，作 $PO\perp AB$，垂足为 O，连接 CO，



因为 $PO\perp BO$，且 $\angle PBA=45^\circ$，

所以 $\triangle PBO$ 是等腰直角三角形，

又 $PB=2\sqrt{2}$，所以 $OB=OP=2$，……（1 分）

又 $BC=2\sqrt{2},\angle CBO=45^\circ$，由余弦定理可知 $CO=2$，

所以 $BO^2+CO^2=BC^2$，即 $OB\perp OC$，……（3 分）

又 $OP\cap OC=O,OP,OC\subset$ 平面 POC，

所以 $OB\perp$ 平面 POC，

又 $PC\subset$ 平面 POC，所以 $OB\perp PC$，即 $AB\perp PC$；……………………………………（5分）

（2）【方法一】因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，且平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$PO\perp AB$，$PO\subset$ 平面 PAB，来源：高三答案公众号

所以 $PO\perp$ 平面 ABC，又 $OC\subset$ 平面 ABC，所以 $PO\perp OC$，……………………………（6分）

以 O 为原点建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $A(1,0,0),B(2,0,0),C(0,2,0),P(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{CA}=(1,-2,0),\overrightarrow{CB}=(2,-2,0),\overrightarrow{CP}=(0,-2,2)$，…………………………………………（8分）

设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=x_1-2y_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=-2y_1+2z_1=0\end{cases}$，

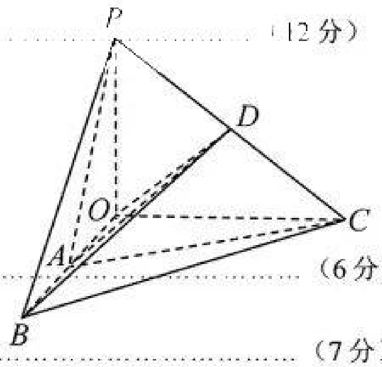
取 $x_1=2$，则 $y_1=z_1=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$，…………………………………………（9分）

设平面 BPC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2x_2-2y_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=-2y_2+2z_2=0\end{cases}$，

取 $x_2=1$，则 $y_2=z_2=1$，所以 $\vec{n}=(1,1,1)$，…………………………………………（10分）

设二面角 $B-PC-A$ 为 θ，由图可知，θ 为锐角，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2+1+1}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ……………………………（12分）



【方法二】设线段 PC 中点为 D，分别连接 OD，AD，BD.

由（1）知 $PO=OC=2$，$PO\perp OC$，$\therefore OD=\sqrt{2}$.

根据条件可得，$\triangle PAB\cong\triangle CAB$，$\therefore PA=CA$，$\therefore AD\perp PC$. ……………………（6分）

$\because PB=CB$，$\therefore BD\perp PC$. ……………………………………………………………（7分）

$\therefore\angle ADB$ 就是二面角 $A-PC-B$ 的平面角. ……………………………………………（8分）

又 $AD=\sqrt{AO^2+OD^2}=\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{BO^2+OD^2}=\sqrt{6}$，……………………………（9分）

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$\cos\angle ADB=\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，……………………………………（11分）

所以，二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$． ……………………………………………………（12分）

21.【解析】（1）由题意可知，$2c=8$，即 $c=4$，所以 $a^2+b^2=16$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $M(-1,y_1),N(-1,y_2)$，

当 AB 与 x 轴垂直时，因为 $AB=MN=12$，则 $|y_1|=|y_2|=6$，……………………………（2分）

所以 $\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{36}{b^2}=1$，解得 $a=2,b=2\sqrt{3}$，

即双曲线 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$． ………………………………………………………（3分）

（2）由（1）可知，$M(-1,y_1),N(-1,y_2)$，

设直线 $AB:x=my-4$，因为直线 AB 与双曲线左支相交于两点，所以 $m\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$．

与 C 的方程联立，$\begin{cases}x=my-4\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1\end{cases}$，消去 x，整理得 $(3m^2-1)y^2-24my+36=0$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{24m}{3m^2-1},y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2-1}$，……………………………………………（5分）

所以 $|PM|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+y_1^2}=\sqrt{y_1^2+12}$．

因为 $\dfrac{x_1^2}{4}-\dfrac{y_1^2}{12}=1$，所以 $y_1^2+12=3x_1^2$，且 $x_1<0$，所以 $|PM|=-\sqrt{3}x_1$．

同理可得 $|PN|=-\sqrt{3}x_2$． ……………………………………………………………………（7分）

所以 $\dfrac{1}{|PM|-t}+\dfrac{1}{|PN|-t}=-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}x_1+t}+\dfrac{1}{\sqrt{3}x_2+t}\right)=-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}my_1+t-4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}my_2+t-4\sqrt{3}}\right)$，

整理得 $\dfrac{1}{|PM|-t}+\dfrac{1}{|PN|-t}=-\dfrac{\sqrt{3}m(y_1+y_2)+2(t-4\sqrt{3})}{3m^2y_1y_2+\sqrt{3}m(t-4\sqrt{3})(y_1+y_2)+(t-4\sqrt{3})^2}$，

所以 $\dfrac{1}{|PM|-t}+\dfrac{1}{|PN|-t}=-\dfrac{24\sqrt{3}m^2+2(t-4\sqrt{3})(3m^2-1)}{108m^2+24\sqrt{3}m^2(t-4\sqrt{3})+(t-4\sqrt{3})^2(3m^2-1)}$，

整理得$\dfrac{1}{|PM|-t}+\dfrac{1}{|PN|-t}=-\dfrac{6tm^2-2\left(t-4\sqrt{3}\right)}{\left(3t^2-36\right)m^2-\left(t-4\sqrt{3}\right)^2}$，……………………………………（9分）

因为$\dfrac{1}{|PM|-t}+\dfrac{1}{|PN|-t}$为定值，所以$\dfrac{6t}{3t^2-36}=\dfrac{2\left(t-4\sqrt{3}\right)}{\left(t-4\sqrt{3}\right)^2}$或$t=4\sqrt{3}$，………………（11分）

解得$t=\sqrt{3}$或$t=4\sqrt{3}$……………………………………………………………………（12分）

22.【解析】（1）当$a=\dfrac{1}{4}$时，$f(x)=\ln x+2x^2-4x-\dfrac{b}{x}$，

则$f'(x)=\dfrac{1}{x}+4x-4+\dfrac{b}{x^2}=\dfrac{4x^3-4x^2+x+b}{x^2}$，……………………………………………………（1分）

设$F(x)=4x^3-4x^2+x+b$，则$F'(x)=12x^2-8x+1=(2x-1)(6x-1)$，

令$F'(x)=0$，解得$x=\dfrac{1}{2}$或$x=\dfrac{1}{6}$，

易知$F(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{6}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，…………（2分）

又$F(0)=F\left(\dfrac{1}{2}\right)=b$，$F\left(\dfrac{1}{6}\right)=b+\dfrac{2}{27}$，

当$b\geqslant0$时，$F(x)\geqslant0$，即$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$单调递增，即$b\geqslant0$不符题意；…………………（3分）

当$-\dfrac{2}{27}<b<0$时，存在$t_1\in\left(0,\dfrac{1}{6}\right),t_2\in\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2}\right),t_3\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，

使得$F(t_1)=F(t_2)=F(t_3)=0$，及$f'(t_1)=f'(t_2)=f'(t_3)=0$，

易知$f(x)$在$(0,t_1)$和(t_2,t_3)上单调递减，在(t_1,t_2)和$(t_3,+\infty)$上单调递增，

即$-\dfrac{2}{27}<b<0$不符题意，…………………………………………………………………………（4分）

当$b\leqslant-\dfrac{2}{27}$时，$F(x)\leqslant0$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上恒成立，则存在$t\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，使得$F(t)=0$，

易知$f(x)$在$(0,t)$单调递减，在$(t,+\infty)$单调递增，即$b\leqslant-\dfrac{2}{27}$符合题意，

又$F(t)=\left(2t-\frac{1}{3}\right)^2\left(t-\frac{2}{3}\right)+b+\frac{2}{27}=0\leqslant\left(2t-\frac{1}{3}\right)^2\left(t-\frac{2}{3}\right)$，则$t\geqslant\frac{2}{3}$，

综上，t的最小值为$\frac{2}{3}$. ……（6分）

（2）易知$f(x)=\frac{1}{x}\left(x\ln x+2x^3-\frac{x^2}{a}-b\right)$，设$g(x)=x\ln x+2x^3-\frac{x^2}{a}-b$，

则$g'(x)=\ln x+6x^2-\frac{2}{a}x+1$，所以$(g'(x))'=\frac{1}{x}+12x-\frac{2}{a}$，……（7分）

① 当$\frac{2}{a}\leqslant2\sqrt{12}$，即$a\geqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$时，$(g'(x))'\geqslant0$，则$g'(x)$单调递增，

又$x\to0$时，$g'(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$g'(x)\to+\infty$，

所以存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$g'(x_0)=0$，……（8分）

易知$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

又$x\to0$时，$g(x)\to-b<0$，$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$，

所以存在唯一的$x_1\in(x_0,+\infty)$，使得$g(x_1)=0$，即$f(x_1)=0$，……（9分）

② 当$\frac{2}{a}>2\sqrt{12}$，即$0<a<\frac{\sqrt{3}}{6}$时，

存在$x_2\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right),x_3\in\left(\frac{\sqrt{3}}{6},+\infty\right)$，使得$(g'(x_2))'=(g'(x_3))'=0$，且$\frac{1}{x_2}+12x_2=\frac{2}{a}$，

易知$g'(x)$在$(0,x_2)$和$(x_3,+\infty)$上单调递增，在(x_2,x_3)上单调递减，……（10分）

又当$x\in(0,x_3]$时，$g'(x)\leqslant g'(x_2)=\ln x_2+6x_2^2-\frac{2}{a}x_2+1=\ln x_2-6x_2^2<0$，

且$x\to+\infty$时，$g'(x)\to+\infty$，所以存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$g'(x_0)=0$，

易知$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，……（11分）

又$x\to0$时，$g(x)\to-b<0$，$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$，

所以存在唯一的$x_1\in(x_0,+\infty)$，使得$g(x_1)=0$，即$f(x_1)=0$；

综上，对任意$a,b>0$，$f(x)$仅存在唯一零点. ……（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。