

2022~2023 学年新乡市高三年级入学测试

数学（理科）

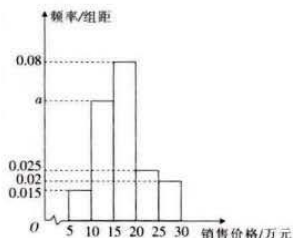
考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{4, x, 2y\}$, $B = \{-2, x^2, 1-y\}$, 若 $A = B$, 则实数 x 的取值集合为 ()
A. $\{-1, 0, 2\}$ B. $\{-2, 2\}$ C. $\{-1, 0, 2\}$ D. $\{-2, 1, 2\}$
2. 已知 $z = 1 - 2i$, 且 $\frac{a+z}{a \cdot \bar{z}}$ 为实数, 则实数 $a =$ ()
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
3. 在 2022 年某地销售的汽车中随机选取 1000 台, 对销售价格与销售数量进行统计, 这 1000 台车辆的销售价格都不小于 5 万元, 小于 30 万元, 将销售价格分为五组: $[5, 10), [10, 15), [15, 20), [20, 25), [25, 30)$ (单位: 万元). 统计后制成的频率分布直方图如图所示. 在选取的 1000 台汽车中, 销售价格落在 $[10, 20)$ 内的车辆台数为 ()



- A. 800 B. 600 C. 700 D. 750
4. 已知直线 l 交抛物线 $C: y^2 = 18x$ 于 M, N 两点, 且 MN 的中点为 $(5, 3)$, 则直线 l 的斜率为 ()
A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. $\frac{18}{5}$
5. 已知体积为 3 的正三棱锥 $P-ABC$, 底面边长为 $2\sqrt{3}$, 其内切球为球 O , 若在此三棱锥中再放入球 O' , 使其与三个侧面及内切球 O 均相切, 则球 O' 的半径为 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{9}$

6. 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数. 如三角形数 1, 3, 6, 10, 第 n 个三角形数为 $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. 记第 n 个 k 边形数为 $N(n, k) (k \geq 3)$, 以下列出了部分 k 边形数中第 n 个数的表达式

三角形数 $N(n, 3) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

正方形数 $N(n, 4) = n^2$

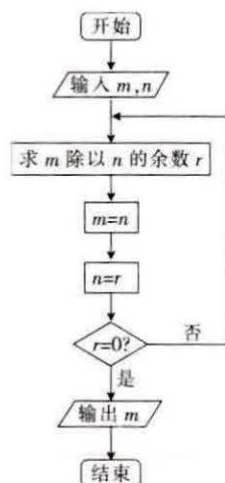
五边形数 $N(n, 5) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

六边形数 $N(n, 6) = 2n^2 - n$

可以推测 $N(n, k)$ 的表达式, 由此计算 $N(20, 23) = (\quad)$

- A. 4020 B. 4010 C. 4210 D. 4120

7. 如图, 程序框图的算法思路源于欧几里得在公元前 300 年左右提出的“辗转相除法”执行该程序框图, 若输入 $m = 2022$, $n = 1314$, 则输出 m 的值为 $(\quad)$



- A. 6 B. 12 C. 18 D. 24

8. 若二项式 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 的展开式中只有第 5 项的二项式系数最大, 则展开式中 x^2 项的系数为 $(\quad)$

- A. -1120 B. -1792 C. 1792 D. 1120

9. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) \left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的

图象, 若 $g(x)$ 图象相邻对称轴间的距离为 π , 对任意 x , 都有 $g(-x) + g(x) = 0$, 且 $f(0) = \sqrt{3}$, 则 $(\quad)$

- A. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$ B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称

- C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 D. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 9, & x \leq 1, \\ 2x + \frac{2}{x-1}, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的最小值为 6, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[1, 2]$ B. $[-\sqrt{3}, 3]$ C. $[-\sqrt{3}, 2]$ D. $[-2, 2]$

11. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$, $f(x) + f(-x) = 0$, 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x)f'(x) > x$, 且 $f(1) = 2$, 则不等式 $[f(x-1)]^2 < x^2 - 2x + 4$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ B. $(0, 2)$ C. $(1, 3)$ D. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

12. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 1$, $S_n + S_{n+1} = n(n+2)$, 则 $\frac{S_{2024}}{S_{2023}} = ()$

- A. $\frac{1013}{1012}$ B. $\frac{2023}{2024}$ C. $\frac{2025}{2023}$ D. $\frac{1013}{1011}$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 已知向量 $\vec{a} = (4, -2)$, $\vec{b} = (2, \lambda)$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则 $\lambda =$ _____.

14. 方程 $\frac{50}{10^x + 1} - 5 = 10^{x+1}$ 的实数解为_____.

15. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = 1$, $AA_1 = 2$, $AB = 3$, M 是棱 C_1D_1 上一点, 且 $D_1M = 1$, 则异面直线 CD 与 BM 所成角的余弦值为_____.

16. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过右焦点 F_2 的直线 l 与双曲线的右支交于 A, B 两点,

则 $\triangle AF_1F_2$ 和 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆面积之和的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 设角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $b = \sqrt{3}$, 且 $b = 2a \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 D 为 AB 的中点, 且 $CD = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12分)

在数字化时代,电子书阅读给人们的阅读方式、认知模式与思维习惯带来了改变,电子书阅读的快速增长也再次引发人们对相关问题的思考.某地对本地群众(中老年人与年轻人)的年龄与阅读习惯(经常电子阅读与经常纸质阅读)进行了调查统计,得到如下列联表:

	年轻人	中老年人	合计
经常电子阅读	50	35	85
经常纸质阅读	x	y	115
合计	M	N	200

设从经常电子阅读的人中任取1人,记抽取到的中老年人人数为 ξ ;从经常纸质阅读的人中任取1人,记抽取到的中老年人人数为 η .已知 $P(\xi=0)=\frac{23}{17}P(\eta=0)$.

(1) 求列联表中 x, y, M, N 的值,并判断是否有95%的把握认为阅读习惯与年龄有关;

(2) 从年轻人中按阅读习惯用分层抽样的方法抽出10人,再从抽出的10人中用简单随机抽样的方法抽取3人,若其中经常电子阅读的人数为 X ,求 X 的分布列及数学期望.

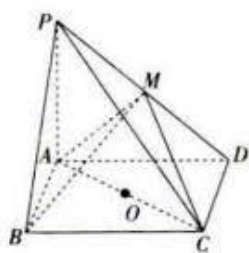
参考公式及数据:

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n=a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

19. (12分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD=8$.以 AC 的中点 O 为球心, AC 为直径的球面交 PD 于点 M .



(1) 证明: M 为 PD 的中点.

(2) 若二面角 $B-AM-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,求 AB .

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $\triangle PAB$ 的三个顶点都在椭圆 C 上, 且 P 为椭圆 C 的左顶点, 直线 AB 经过点 $(-1, 0)$.

(1) 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

(2) 若 $\triangle PAB$ 三边所在的直线斜率都存在, 且分别记为 k_{PA}, k_{PB}, k_{AB} , 试判断 $k_{AB}(k_{PA} + k_{PB})$ 是否为定值. 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - ax + 2a \ln x$.

(1) 判断 $f(x)$ 极值点的个数;

(2) 当 $a \leq e$ 时, 证明: $f(x) \geq 0$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生从第 22, 23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为

$$\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 曲线 } C_2 \text{ 的极坐标方程为 } \rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0.$$

(1) 求曲线 C_1 和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设 $P(3, 1)$, 曲线 C_1 与曲线 C_2 的交点为 A, B , 求 $\frac{|PA| + |PB|}{|AB|}$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x + a| + |x - 2a|$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 5$.

(2) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 2a^2$ 成立, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线