2023届12月高三联合测评(福建)·数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】B

【解析】易知 $A=\{-1,0,1,2\}$，则其真子集的个数为 $2^4-1=15$. 故选 B.

2.【答案】C

【解析】设夹角为 θ. 因为 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=2\sqrt{10}\cos\theta=4$，解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$. 故选 C.

3.【答案】B

【解析】设公比为 q，有 $q=\frac{a_3+a_4}{a_2+a_3}=-2$，可得 $-2a_1+4a_1=-2$，得 $a_1=-1$，有 $S_8=\frac{-1\times[1-(-2)^8]}{1-(-2)}=85$. 故选 B.

4.【答案】A

【解析】两条平行线间的距离 $d=\frac{|1-(-1)|}{\sqrt{m^2+(2m-1)^2}}=2$，解得 $m=0$ 或 $m=\frac{4}{5}$，即"$m=0$"是"两直线间距离为2"的充分不必要条件. 故选 A.

5.【答案】D

【解析】易知 $e_1^2=\frac{t^2+4}{4}$，$e_2^2=\frac{t^2+1}{t^2}$，则 $(e_1e_2)^2=\frac{(t^2+4)(t^2+1)}{4t^2}=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{t^2}+\frac{5}{4}$，故 $(e_1e_2)^2=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{t^2}+\frac{5}{4}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$，当且仅当 $\frac{t^2}{4}=\frac{1}{t^2}$，即 $t=\sqrt{2}$ 时等号成立，故 e_1e_2 的最小值为 $\frac{3}{2}$. 故选 D.

6.【答案】C

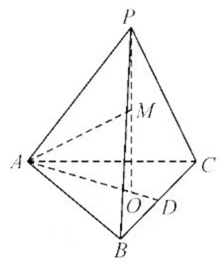
【解析】当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega\leqslant 2$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $\omega\leqslant 2$，所以 $\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega\geqslant 1$，

综上，$\omega\in[1,2]$. 故选 C.

7.【答案】A



【解析】设侧棱长为 x，且易知 $OA=2\sqrt{3}$，

则 $\cos\angle PAO=\frac{OA}{PA}=\frac{2\sqrt{3}}{x}$，$\cos\angle APB=\frac{x^2+x^2-36}{2x^2}=\frac{x^2-18}{x^2}$，

因为 $\angle APB=2\angle PAO$，所以 $2\left(\frac{2\sqrt{3}}{x}\right)^2-1=\frac{x^2-18}{x^2}$，解得 $x=\sqrt{21}$，

所以 $OP=\sqrt{PA^2-OA^2}=3$，

设球心为 M，则 $MP=MA=R$，$MO=|3-R|$，

因为 $MA^2=MO^2+OA^2$，所以 $R^2=(3-R)^2+(2\sqrt{3})^2$，解得 $R=\frac{7}{2}$，所以表面积 $S=4\pi R^2=49\pi$. 故选 A.

8.【答案】D

【解析】由题意可知，x_1，x_2 同时满足方程 $f'(x)=-\frac{1}{2}$ 和方程 $f(x)=-\frac{1}{2}x+a$，

因为 $f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^{x-a}}-\frac{1}{x}$，则 $\frac{2x-x^2}{e^{x-a}}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{x^2(2-x)}{e^{x-a}}=\frac{1}{2}(2-x)$，

因为 $x_1<2<x_2$，所以 x_1,x_2 满足方程 $\frac{x^2}{e^{x-a}}=\frac{1}{2}$ ①，

又 x_1,x_2 满足方程 $f(x)=\frac{x^2}{e^{x-a}}-\ln x=-\frac{1}{2}x+a$，所以 $\frac{1}{2}-\ln x=-\frac{1}{2}x+a$，

所以 $x+1-2\ln x=2a$，所以 $\ln\frac{e^{x+1}}{x^2}=2a$，即 $\frac{e^{x+1}}{x^2}=e^{2a}$，

由①式可知 $\frac{e^{x-a}}{x^2}=2$，所以 $\frac{e^{x-a}\cdot e^{a+1}}{x^2}=2\cdot e^{a+1}$，所以 $\frac{e^{x+1}}{x^2}=2e^{a+1}$，

则 $2\cdot e^{a+1}=e^{2a}$，$2=e^{a-1}$，$a-1=\ln 2$，$a=1+\ln 2$. 故选 D.

9.【答案】AD

【解析】由 $z=\frac{4+2i}{1-i}=\frac{2(1+i)(2+i)}{(1+i)(1-i)}=1+3i$，有 $|z|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，复数 z 在复平面内所对应的点为 $(1,3)$，位于第一象限，$\left(\frac{z-1}{3}\right)^{2023}=i^{2023}=-i$，故 AD 是正确的. 故选 AD.

10.【答案】BCD

【解析】由题意可知，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，

因为 $\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha=\frac{-2\sqrt{5}}{25}<0$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3}{2}\pi$，所以 $\beta+\alpha>\pi$，即 A 错误；

因为 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$，且 $0<\beta-\alpha<\pi$，所以 $\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$，即 B 正确；

因为 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{3}{5}=\cos\beta$，所以 $\beta=2\alpha$，即 C 正确；

因为 $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{4}{3}$，所以 $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{24}{7}$，又 $\beta=2\alpha$，所以 $\tan 2\alpha+\tan 2\beta=\tan\beta+\tan 2\beta>0$，即 D 正确. 故选 BCD.

11.【答案】ABD

【解析】取 $x=1$，$y=0$，有 $f(1)=f(0)f(1)$，由 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$，可得 $f(1)>0$，可得 $f(0)=1$，故 A 选项正确；

取 $x=-y=0$，有 $f(-x)f(x)=f(0)=1$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，可得 $f(-x)>0$，可得对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)>0$，故 B 选项正确；

设 $x_2>x_1$，有 $f(x_2)-f(x_1)=f[(x_2-x_1)+x_1]-f(x_1)=f(x_2-x_1)f(x_1)-f(x_1)=[f(x_2-x_1)-1]\cdot f(x_1)$，由 $x_2>x_1$，有 $0<f(x_2-x_1)<1$，又由 $f(x_1)>0$，可得 $f(x_2)<f(x_1)$，可知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故 C 选错误；

由 $f(3)=f(1)f(2)=[f(1)]^3=\frac{1}{27}$，可得 $f(1)=\frac{1}{3}$，不等式 $f(2x)f(x-2x^2)\leqslant\frac{1}{3}$ 可化为 $f(3x-2x^2)\leqslant f(1)$，由函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，有 $3x-2x^2\geqslant 1$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，故 D 选项正确. 故选 ABD.

12.【答案】AC

【解析】因为 $(x_0-\sqrt{10})^2+(y_0-\sqrt{10})^2=8$，所以 $x_0^2+y_0^2-2\sqrt{10}(x_0+y_0)+12=0$，

又 $x_0>0$，$y_0>0$，所以 $(x_0+y_0)^2-2\sqrt{10}(x_0+y_0)+12=2x_0y_0\leqslant\frac{(x_0+y_0)^2}{2}$，

解得 $x_0+y_0\in[2\sqrt{10}-4,2\sqrt{10}+4]$，即 A 正确；

因为 $y_0^2=2p_1x_0$，$x_0^2=2p_2y_0$，所以 $x_0y_0=4p_1p_2$，

当 OP 与圆相切时，$|OP|^2=x_0^2+y_0^2=|OC|^2-8=12$，所以 $x_0+y_0=\frac{12}{\sqrt{10}}$，

所以 $2x_0y_0=(x_0+y_0)^2-(x_0^2+y_0^2)=\frac{12}{5}$，所以 $p_1p_2=\frac{x_0y_0}{4}=\frac{3}{10}$，即 B 错误；

因为 $(x_0+y_0)^2-2\sqrt{10}(x_0+y_0)+12=2x_0y_0$，

令 $t=x_0+y_0$，$t\in[2\sqrt{10}-4,2\sqrt{10}+4]$，则 $2x_0y_0=f(t)=t^2-2\sqrt{10}t+12$，

$f(t)_{\min}=f(\sqrt{10})=2$，

$f(t)_{\max}=(2\sqrt{10}+4)^2-2\sqrt{10}(2\sqrt{10}+4)+12=8\sqrt{10}+28$.

得 $x_0y_0\in[1,4\sqrt{10}+14]$，所以 $p_1p_2=\frac{x_0y_0}{4}\in\left[\frac{1}{4},\sqrt{10}+\frac{7}{2}\right]$，即 C 正确，D 错误. 故选 AC.

13.【答案】6π

【解析】易知该菱形 AB 边上的高为 $\sqrt{3}$，由题意可知，所形成几何体的体积等同于底面半径为 $\sqrt{3}$，高为 2 的圆柱体的体积，所以 $V=\pi\times(\sqrt{3})^2\times2=6\pi$.

14.【答案】$-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$（答案不唯一）

【解析】因为 $f(x+4)=f(x)$，所以奇函数 $f(x)$ 的周期为 4，所以可取 $f(x)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$，由 $0<x<1$ 时，$0<\frac{\pi}{2}x<\frac{\pi}{2}$，可知此时 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

15.【答案】$(-1,0)$

【解析】$f'(x)=\frac{1}{x}-2ax+a-2=\frac{(ax+1)(-2x+1)}{x}$，

若 $a\geqslant0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，无最小值，不符合题意；

若 $a\leqslant-1$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，无最小值，不符合题意；

若 $-1<a<0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{1}{a}$，列表可知，$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{a}\right)$，符合题意，即 $-1<a<0$.

16.【答案】17　$2^{n+3}+n-8$

【解析】因为 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，所以 $(a_2)_1=2a_2-a_1=5$，$(a_3)_1=3a_3-2a_2=9$，

所以 $(a_3)_2=3(a_3)_1-2(a_2)_1=17$；

由题意可知，$(a_1)_n=a_1=1$，且 $(a_2)_{n+1}=2(a_2)_n-(a_1)_n$，所以 $(a_2)_{n+1}=2(a_2)_n-1$，

所以 $[(a_2)_{n+1}-1]=2[(a_2)_n-1]$，

又 $(a_2)_1=5$，所以 $(a_2)_1-1=4$，所以 $(a_2)_n-1=2^{n+1}$，即 $(a_2)_n=2^{n+1}+1$，

因为 $(a_3)_{n+1}=3(a_3)_n-2(a_2)_n$，所以 $(a_3)_{n+1}=3(a_3)_n-2^{n+2}-2$，

所以 $(a_3)_{n+1}=3(a_3)_n-2^{n+2}-2$，所以 $(a_3)_{n+1}-4\cdot2^{n+1}-1=3[(a_3)_n-4\cdot2^n-1]$，

又 $(a_3)_1-4\cdot2-1=0$，所以 $(a_3)_n-4\cdot2^n-1=0$，即 $(a_3)_n=4\cdot2^n+1$，

所以 $S_n=4\cdot\frac{2(1-2^n)}{1-2}+n=2^{n+3}+n-8$.

17.【答案】选①，$S_n=\sqrt{n+1}-1$；选②，$S_n=\frac{(-1)^n}{n+1}-1$；选③，$S_n=(n-1)2^{n+1}+2$

【解析】因为 $a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n$，$a_n>0$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$，……………………………………………… 3 分

又因为 $a_1=1$，所以 $\frac{1}{a_1}=1$，所以 $\frac{1}{a_n}=n$，即 $a_n=\frac{1}{n}$，……………………………………………… 5 分

选①，$b_n=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{n(n+1)}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，………………………………………… 8 分

所以 $S_n=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$；………………………………… 10 分

选②，$b_n=(-1)^n(a_{n+1}+a_n)=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$，………………………………………… 7 分

所以 $S_n=\left(-1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{(-1)^n}{n+1}-1$；………………………… 10 分

选③，$b_n=\dfrac{2^n}{a_n}=n\cdot 2^n$，所以 $S_n=2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$，……………………………………… 6 分

$2S_n=2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$，…………………………………………………………………… 7 分

两式相减，可得 $S_n=n\cdot2^{n+1}-(2+2^2+\cdots+2^n)=n\cdot2^{n+1}-\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=(n-1)2^{n+1}+2$. ………… 10 分

18.【答案】(1)$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　(2)$\dfrac{27}{13}$

【解析】(1)因为 $a=3$，且 $a+3b=6$，所以 $a+3b=2a$，即 $a=3b$，

由正弦定理可知，$\sin A=3\sin B$. ……………………………………………………………………………… 2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)$，………………………………………… 4 分

即 $\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=3\sin B$，所以 $\sin B\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos B\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sin B$，

整理得$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\dfrac{5}{2}\sin B$，所以 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$； ……………………………………………………… 6 分

(2)因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=bc\cos A+ac\cos B$，

由余弦定理可知，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}+\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}=c^2$，……………………… 8 分

因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$，且 $a+3b=6$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(6-3b)^2+b^2-(6-3b)b=13b^2-42b+36$. …………………… 10 分

当 $b=\dfrac{21}{13}$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的最小值为 $13\times\left(\dfrac{21}{13}\right)^2-42\times\dfrac{21}{13}+36=\dfrac{27}{13}$. ……………………… 12 分

19.【答案】(1)$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$　(2)满足题意的定点 P 存在，坐标为(1,0)

【解析】(1)由双曲线 C 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$，有 $2b=2\sqrt{2}$，可得 $b=\sqrt{2}$，………………………………… 1 分

又由双曲线 C 是等轴双曲线，可得 $a=b=\sqrt{2}$，……………………………………………………………… 2 分

故双曲线 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$；………………………………………………………………………… 3 分

(2)由(1)可知双曲线 C 的右焦点 F 的坐标为(2,0)，

假设存在这样的点 P，设点 P 的坐标为$(t,0)$，

设直线 AB 的方程为 $my=x-2$，点 A，B 的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……………………………… 4 分

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1,\\ my=x-2,\end{cases}$消去 x 后整理为$(m^2-1)y^2+4my+2=0$，

有 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{2}{m^2-1}$，………………………………………………………………… 6 分

若$\angle APF=\angle BPF$，可知直线 AP 和直线 BP 的斜率互为相反数，

有 $k_{AP}+k_{BP}=0$，……………………………………………………………………………………………… 8 分

又由 $k_{AP}+k_{BP}=\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=\frac{y_1}{my_1+2-t}+\frac{y_2}{my_2+2-t}=\frac{2my_1y_2+(2-t)(y_1+y_2)}{(my_1+2-t)(my_2+2-t)}$，

可得 $2my_1y_2+(2-t)(y_1+y_2)=0$， ………………………………………………………… 10 分

有 $\frac{4m}{m^2-1}+\frac{4m(t-2)}{m^2-1}-\frac{4m(t-1)}{m^2-1}=0$，

由 m 的任意性，可得 $t=1$，

由上知满足题意的定点 P 存在，坐标为$(1,0)$. ………………………………………………………… 12 分

20.【答案】(1)当$\frac{PF}{PB}=\frac{1}{3}$时，$CF$∥平面 PDE，理由略　(2)$\frac{28}{9}$

【解析】(1)当$\frac{PF}{PB}=\frac{1}{3}$时，$CF$∥平面 PDE.

理由如下：

过点 C 作 $CH\perp ED$，垂足为 H，

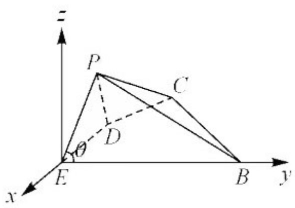
在 PE 上取一点 M，使得 $PM=\frac{1}{3}PE$，连接 HM，FM， ………………………………………… 2 分

因为 $PM=\frac{1}{3}PE$，$PF=\frac{1}{3}PB$，所以 $FM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{3}EB$， ………………………………………… 3 分

因为 D 是 AC 的中点，且 $DE\perp AB$，所以 $CH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{3}EB$， ………………………………………… 4 分

所以 $CH \mathrel{\underline{\parallel}} FM$，所以四边形 $CFMH$ 是平行四边形，即 $CF\parallel HM$，

又因为 $CF\not\subset$平面 PDE，$HM\subset$平面 PDE，所以 CF∥平面 PDE； ……………………………… 5 分



(2)易知 $DE\perp PE$，$DE\perp BE$，且 $PE=DE=\sqrt{2}$，

作 $EN\perp$平面 $EBCD$，以$\{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EN}\}$为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，设$\angle PEB=\theta$，

则 $D(-\sqrt{2},0,0)$，$C(-2\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$P(0,\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$， …………… 7 分

则$\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{DP}=(\sqrt{2},\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=\sqrt{2}x+\sqrt{2}\cos\theta\cdot y+\sqrt{2}\sin\theta\cdot z=0,\end{cases}$

取 $x=\sin\theta$，则 $y=\sin\theta$，$z=-\cos\theta-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sin\theta,\sin\theta,-\cos\theta-1)$，……………………………… 9 分

易知平面 PBE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，设平面 PBE 与平面 PCD 所成锐二面角为 α，

由题意可知，$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\theta+(-\cos\theta-1)^2}}=\frac{1}{2}$，

整理得 $3\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$，解得 $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 或 $\cos\theta=-1$(舍去)，所以 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$， ……………… 11 分

所以四棱锥 $P-BCDE$ 的高 $h=\sqrt{2}\sin\theta=\frac{4}{3}$，

又四边形 $BCDE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times4^2-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2=7$，

所以四棱锥 $P-BCDE$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times7\times\frac{4}{3}=\frac{28}{9}$. ………………………………………………………… 12 分

21.【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　(2)$2\sqrt{3}$

【解析】(1)联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=mx+n,\end{cases}$得$(b^2+4m^2)x^2+8mnx+4n^2-4b^2=0$， ………………………………… 1 分

$\therefore\Delta=b^4+4m^2b^2-b^2n^2=0$，即 $b^2=n^2-4m^2$， …………………………………………………… 3 分

$\therefore$ 把 $m=1,n=\sqrt{7}$ 代入，得 $b^2=3$，

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$； …………………………………………………… 4 分

(2) 由(1)可知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. $\therefore|F_1P|+|F_2Q|=\frac{|-m+n|}{\sqrt{1+m^2}}+\frac{|m+n|}{\sqrt{1+m^2}}$，

由(1)知 $n^2=4m^2+3$，由 $(n+m)(n-m)=n^2-m^2=3m^2+3>0$，可知 $n+m$ 和 $n-m$ 同号，

可知 $|F_2P|+|F_2Q|=\frac{|(-m+n)+(m+n)|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{2|n|}{\sqrt{1+m^2}}$， …………………………………… 7 分

设直线 l 的倾斜角为 α，则 $|PQ|=|F_1F_2|\cdot|\cos\alpha|=\frac{2}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}$， ……………… 9 分

$\therefore S_{梯形F_1F_2QP}=\frac{1}{2}(|F_1P|+|F_2Q|)\cdot|PQ|=\frac{2|n|}{1+m^2}$， ……………………………………… 10 分

由(1)可知 $m^2=\frac{n^2-3}{4}$，代入得 $S_{梯形F_1F_2QP}=\frac{8|n|}{n^2+1}=\frac{8}{|n|+\frac{1}{|n|}}$，

$\because|n|=\sqrt{3+4m^2}\geqslant\sqrt{3}$，$\therefore$ 当 $n=\pm\sqrt{3}$，$m=0$ 时，$S_{四边形F_1F_2QP}$ 取最大值 $2\sqrt{3}$. ………………… 12 分

22.【答案】(1) 极大值为 $\frac{1}{e^2}$，极小值为 0　(2) $(-\infty,1]$

【解析】(1) 由 $f'(x)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=2x(x+1)e^{2x}$，

令 $f'(x)>0$，有 $x>0$ 或 $x<-1$， …………………………………………………………… 2 分

故函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$，减区间为 $(-1,0)$， ………………………………… 3 分

函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=\frac{1}{e^2}$，极小值为 $f(0)=0$； ……………………………………… 4 分

(2) 不等式 $f(x)\geqslant2ax+2\ln x+1$ 可化为 $x^2e^{2x}\geqslant2ax+2\ln x+1$，

可化为 $x^2e^{2x}-\ln x^2-1\geqslant2ax$，

可化为 $x^2e^{2x}-\ln x^2-2x-1\geqslant(2a-2)x$，

可化为 $x^2e^{2x}-\ln(x^2e^{2x})-1\geqslant(2a-2)x$， ………………………………………………… 7 分

令 $g(x)=x-\ln x-1$，有 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，可得函数 $g(x)$ 的减区间为 $(0,1)$，增区间为 $(1,+\infty)$，

可得 $g(x)\geqslant g(1)=0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），

可得不等式 $x-\ln x-1\geqslant0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），

故有 $x^2e^{2x}-\ln(x^2e^{2x})-1\geqslant0$（当且仅当 $x^2e^{2x}=1$ 时取等号）， …………………………………… 8 分

① 当 $a\leqslant1$ 时，由 $x^2e^{2x}-\ln(x^2e^{2x})-1\geqslant0$，$(2a-2)x\leqslant0$，可知不等式成立； ……………………… 9 分

② 当 $a>1$ 时，由函数 $h(x)=x^2e^{2x}(x\geqslant0)$ 单调递增，且 $h(0)=0$，$h(1)=e^2$，可知存在 $m\in(0,1)$ 满足 $x^me^{2m}=1$，

此时有 $m^2e^{2m}-\ln(m^2e^{2m})-1=0$，而 $(2a-2)m>0$，此时不满足 $f(x)\geqslant2ax+2\ln x+1$ 恒成立，

由上知，若不等式 $f(x)\geqslant2ax+2\ln x+1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。