重庆八中高 2023 届高三（下）全真模拟考试
数学试题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，有一项是符合题目要求的．

1．若集合 $A=\{x\mid x>0\},B=\{x\mid x^2-x-2\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$[-1,+\infty)$　　B．$[1,2]$　　C．$(0,2]$　　D．$[0,2]$

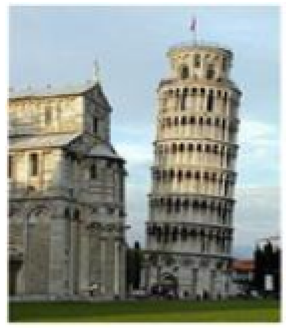
2．若 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=\overline{z_1}(2+\mathrm{i})$，则 $|z_2|=$（　　）

A．$\sqrt{10}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．10

3．某班学生的一次的数学考试成绩 ξ（满分：100 分）服从正态分布：$\xi\sim N(85,\sigma^2)$，且 $P(83<\xi<87)=0.3$，$P(78<\xi<83)=0.12$，$P(\xi<78)=$（　　）

A．0.14　　B．0.18　　C．0.23　　D．0.26

4．比萨斜塔是意大利的著名景点，因斜而不倒的奇特景象而世界闻名，把地球看作一个球（球心记为 O），地球上的一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，OA 的方向即为 A 点处的竖直方向．已知斜塔处于北纬 $44°$，经过测量，比萨斜塔朝正南方向倾斜，且其中轴线与竖直方向的夹角为 $4°$，则中轴线与赤道所在平面所成的角为（　　）



A．$50°$　　B．$48°$　　C．$42°$　　D．$40°$

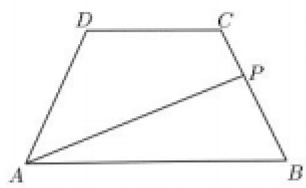
5．若二项式 $(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^n(n\in N^*)$ 的展开式中只有第 3 项的二项式系数最大，则展开式中 $x^{\frac{5}{2}}$ 项的系数为（　　）

A．32　　B．-32　　C．16　　D．-16

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2+\log_2(2-x),x<2\\ 3^{x-2},x\ge 2\end{cases}$，则 $f(0)+f(\log_3 36)=$（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

7．如图所示，梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，且 $AB=2AD=2CD=2CB=2$，点 P 在线段 BC 上运动，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 x^2+y^2 的最小值为（　　）



A．$\frac{5}{4}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{13}{16}$　　D．$\frac{13}{4}$

8．已知函数 $f(x)=-x^2-\cos x$，则 $f(x-1)>f(-1)$ 的解集为（　　）

A．$(2,+\infty)$　　B．$(-\infty,0)$　　C．$(0,2)$　　D．$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．已知 P 是椭圆 $C:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 上的一点，F_1,F_2 是椭圆 C 的两个焦点，则下列结论正确的是（　　）

A．椭圆 C 的短轴长为 $2\sqrt{3}$　　B．F_1,F_2 的坐标为 $(-1,0),(1,0)$

C．椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$　　D．存在点 P，使得 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$

10. 随着时代与科技的发展，信号处理以各种方式被广泛应用于医学、声学、密码学、计算机科学、量子力学等各个领域.而信号处理背后的“功臣”就是正弦型函数，$f(x)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}$ 的图象就可以近似的模拟某种信号的波形，则下列说法正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 为周期函数，且最小正周期为 π

D. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的最大值为 3

11. 已知 $a,b\in R$，满足 $e^a+e^b=4$，则（　　）

A. $a+b\le 2\ln 2$　　B. $e^a+b\le 3$　　C. $ab\ge 1$　　D. $e^{2a}+e^{2b}\ge 8$

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_n^2-a_{n-1}^2=p(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*,p$为非零常数)，则称 $\{a_n\}$ 为“等方差数列”，p 称为“公方差”，下列对“等方差数列”的判断正确的是（　　）

A. $\{(-2)^n\}$ 是等方差数列

B. 若正项等方差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且 a_1,a_2,a_4 是等比数列，则 $a_n=\sqrt{n}$

C. 等比数列不可能为等方差数列

D. 存在数列 $\{a_n\}$ 既是等差数列，又是等方差数列

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 A 在 C 上，过 A 作 y 轴的垂线，垂足为 M，若 $|AF|-|AM|=2$，则 $p=$________.

14. 已知在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_3=8,a_5=32$,则使不等式 $S_n>511$ 成立的正整数 n 的最小值为__________.

15. 已知函数 $f(x)=(x-1)(e^x-kx)(x>0)$ 存在唯一零点，则 k 的取值范围为__________.

16. 以棱长为 $2\sqrt{6}$ 的正四面体中心点 O 为球心，半径为 $\sqrt{3}$ 的球面与正四面体的表面相交部分总长度为 _________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c .已知 $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3}{2}b$.

（1）证明：$\sin A+\sin C=2\sin B$；

（2）若 $b=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，求边长 a,c .

18. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n,S_n,{a_n}^2$ 为等差数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）若 m 为正整数,记集合 $\{m|2a_n > m\}$ 的元素个数为 $\{b_n\}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前50项和.

19．2022 年 12 月 6 日全国各地放开对新冠疫情的管控，在强大的祖国庇护下平稳抗疫三年的中国人民迎来了与新冠变异毒株奥密克戎的首次正面交锋.某市为了更好的了解全体中小学生感染新冠感冒后的情况，以便及时补充医疗资源.从全市中小学生中随机抽取了 100 名抗原检测为阳性的中小学生监测其健康状况，100 名中小学生感染奥密克戎后的疼痛指数为 X，并以此为样本得到了如下图所示的表格：

疼痛指数 X	$X \leqslant 10$	$10 < X < 90$	$X \geqslant 90$
人数(人)	10	81	9
名称	无症状感染者	轻症感染者	重症感染者

其中轻症感染者和重症感染者统称为有症状感染者.

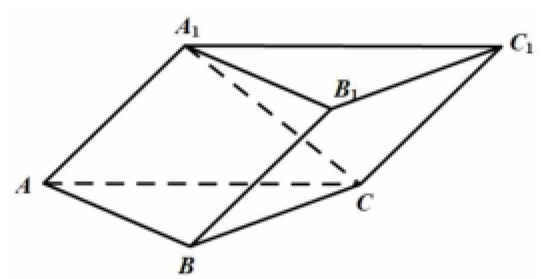
（1）统计学中常用 $L = \dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 表示在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的似然比.现从样本中随机抽取 1 名学生，记事件 A：该名学生为有症状感染者，事件 B：该名学生为重症感染者，求似然比 L 的值；

（2）若该市所有抗原检测为阳性的中小学生的疼痛指数 X 近似的服从正态分布 $N(50,\sigma^2)$，且 $P(X \geqslant 90) = \dfrac{1}{10}$.若从该市众多抗原检测为阳性的中小学生中随机抽取 3 名，设这 3 名学生中轻症感染者人数为 Y，求 Y 的分布列及数学期望.

20．在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC = \dfrac{2\pi}{3}$，$AB = BC = 2$，且 $A_1B \perp AC$.

（1）证明：$A_1A = A_1C$；

（2）若 $A_1A = 2$，二面角 A_1-AC-B 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$，求平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.



21．已知函数 $f(x)=\left[\ln^2 x-(a+1)\ln x+1\right]\cdot x, a\in R$，

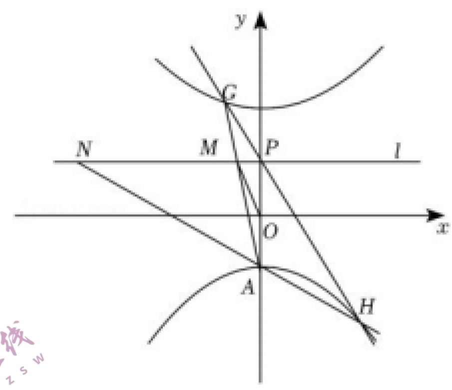
（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $a=-1$, 对任意 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，当 $x_1>x_2$ 时，不等式 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<m(x_1{}^2-x_2{}^2)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

22．在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，实轴长为 4.

（1）求 C 的方程；

（2）如图，点 A 为双曲线的下顶点，直线 l 过点 $P(0,t)$ 且垂直于 y 轴(P 位于原点与上顶点之间)，过 P 的直线交 C 于 G，H 两点，直线 AG，AH 分别与 l 交于 M，N 两点，若 O，A，N，M 四点共圆，求点 P 的坐标.



自主选拔在线 微信号：zizzsw

重庆八中高 2023 届高三（下）全真模拟考试

数学试题答案

一、选择题：CACD　BDBC

1. C【详解】：$\because B=\{x\,|-1\le x\le 2\}\therefore A\cap B=(0,2]$，故选：$C$.

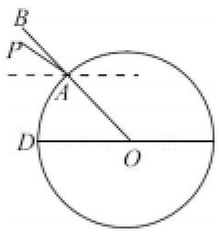
2.A【详解】：$z_2=\overline{z_1}(2+\mathrm{i})=(1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，所以，$|z_2|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ 故选：A.

3.C【详解】：根据题意，$\xi\sim N\left(85,\sigma^2\right)$，且 $P\left(83<\xi<87\right)=0.3$，

则 $P\left(83<\xi<85\right)=0.15$，又由 $P\left(78<\xi<83\right)=0.12$，

故 $P\left(\xi<78\right)=0.5-0.15-0.12=0.23$，故选：$C$.

4．D【详解】：如图所示，AP 为比萨斜塔的中轴线，$\angle AOD=44°$，$\angle BAP=4°$，
则 $\angle PAC=40°$，即中轴线与赤道所在平面所成的角为 $40°$．故选：D．

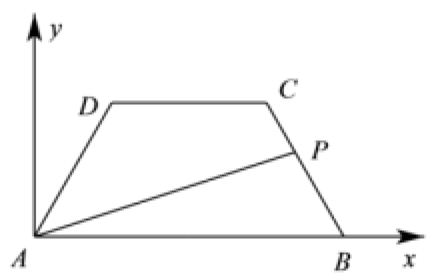


5. B【详解】：$\because (2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式只有第 3 项的二项式系数 C_n^2 最大，$\therefore n=4$，

$\therefore (2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^4$ 的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_4^r\left(2x\right)^{4-r}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$，$(r=0,1,2,3,4)$，$\therefore$ 令 $4-\dfrac{3}{2}r=\dfrac{5}{2}$，解得：$r=1$，$\therefore T_2=C_4^1 2^3(-1)^1 x^{\frac{5}{2}}=-32x^{\frac{5}{2}}$，即：展开式中 $x^{\frac{5}{2}}$ 项的系数为 -32. 故选：B．

6.D【详解】：$f(0)+f(\log_3 36)=2+\log_2 2+3^{\log_3 36-2}=2+1+\dfrac{36}{9}=7$，故选：$D$．

7.B【详解】如图建立平面直角坐标系，



则 $A\left(0,0\right),B\left(2,0\right),C\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(2,0),\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC},(0\le\lambda\le 1)$，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\therefore \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\left(2-\dfrac{1}{2}\lambda,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$，

又 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}=x(2,0)+y\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(2x+\frac{1}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$，$\therefore\begin{cases}2-\frac{1}{2}\lambda=2x+\frac{1}{2}y\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}y\end{cases}$，

解得 $x=1-\frac{1}{2}\lambda,y=\lambda$，$\therefore x^2+y^2=\left(1-\frac{1}{2}\lambda\right)^2+\lambda^2=\frac{5}{4}\lambda^2-\lambda+1=\frac{5}{4}\left(\lambda-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\geq\frac{4}{5}$，

即 x^2+y^2 的最小值为 $\frac{4}{5}$.故选：B.

8. C【详解】：$\because y=x^2$，$y=\cos x$ 均为偶函数，故函数 $f(x)$ 为偶函数，

$f'(x)=-2x+\sin x$，$f''(x)=-2+\cos x$，

$\because\cos x\in[-1，1]$，$\therefore f''(x)<0$，又 $\because f'(0)=0$，$\therefore f'(x)<0$ 在 $(0，+\infty)$ 恒成立，

故在 $(0,+\infty)$ 函数 $f(x)$ 递减，函数在 $(-\infty,0)$ 递增.

$f(x-1)>f(-1)\Leftrightarrow|x-1|<1\Leftrightarrow x\in(0,2)$，故选：$C$.

二、多项选择题：AC　ABD　ABD　BC

9. AC【详解】椭圆的焦点在 y 轴上，$a=2,b=\sqrt{3},c=1$ 则短轴长为 $2b=2\sqrt{3}$，A 正确；

F_1,F_2 的坐标为 $(0,\pm1)$，B 错误；离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，C 正确；

当点 P 位于短轴的端点时，$\angle F_1PF_2$ 取得最大值 $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，D 错误，故选：AC.

10.ABD【详解】因为函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}$，定义域为 R，

对于 A，$f(\pi+x)=\sin(\pi+x)+\frac{\sin(3\pi+3x)}{3}+\frac{\sin(5\pi+5x)}{5}$

$=-\sin x-\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 5x}{5}=\sin(-x)+\frac{\sin(-3x)}{3}+\frac{\sin(-5x)}{5}=f(-x)$，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故 A 正确；

对于 B，$f(-x)=\sin(-x)+\frac{\sin(-3x)}{3}+\frac{\sin(-5x)}{5}=-\sin x-\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 5x}{5}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于点 $(0,0)$ 对称，故 B 正确；

对于 C，由题知 $f(x+\pi)=-f(x)\neq f(x)$，故 C 错误；

对于 D，由题可知 $f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x\leq 3$，故 D 正确.故选：ABD.

11. ABD【详解】：对于 A，由 $e^a+e^b=4\geqslant 2\sqrt{e^{a+b}}$，得 $e^{a+b}\leqslant 2$，$\therefore a+b\leqslant 2ln2$

当且仅当 $a=b=\ln 2$ 时等号成立，A 正确；

对于 B，由 $e^a=4-e^b>0$，得 $e^a+b=4+b-e^b$ 且 a，$b\in(-\infty,\ln 4)$，

令 $f(x)=4+x-e^x(x<\ln 4)$，则 $f'(x)=1-e^x$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

在 $(0,\ln 4)$ 上单调递减，所以 $f(x)\le f(0)=3$，即 $e^a+b=4+b-e^b\le 3$，B 正确；

对于 C，当 $a=0,b=\ln 3$ 时，$ab=0<1$，C 错误；

对于 D，$(e^a+e^b)^2=\frac{1}{2}\cdot 2(e^{2a}+e^{2b})\ge\frac{1}{2}(e^{2a}+e^{2b}+2\sqrt{e^{2a}\cdot e^{2b}})=\frac{1}{2}(e^{2a}+e^{2b})^2=8$，D 正确.

故选：ABD.

12.BC【详解】设 $a_n=(-2)^n$,则 $a_n^2-a_{n-1}^2=3\cdot 4^{n-1}$不为非零常数,所以$\{(-2)^n\}$不是等方差数列,故 A 错误；

由题意 $a_n^2=1+(n-1)p$，则 $a_2=\sqrt{1+p},a_4=\sqrt{1+3p}$，即$1+p=\sqrt{1+3p}$，解得 $p=1$ 或 $p=0$（舍去），

当 $p=1$时，$a_n^2=n,a_n=\sqrt{n}$ 满足题意，故 B 正确；

设数列$\{a_n\}$为等比数列,不妨设 $a_n=cq^n$,则 $a_{n-1}=cq^{n-1}$,所以 $a_n^2-a_{n-1}^2=c^2q^{2n-2}(q^2-1)$,

若 $c^2q^{2n-2}(q^2-1)$ 为常数,则 $q=\pm 1$,但此时 $c^2q^{2n-2}(q^2-1)=0$,不满足题意,故C 正确；

若数列$\{a_n\}$既是等差数列,又是等方差数列

不妨设 $a_n^2-a_{n-1}^2=p,(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*,p$为非零数$),a_n-a_{n-1}=d(d\ne 0)$,

所以$(a_n+a_{n-1})d=p$,即 $a_n+a_{n-1}=\frac{p}{d}$,所以 $2a_n-d=\frac{p}{d}$,即 $a_n=\frac{p}{2d}+\frac{d}{2}$

所以$\{a_n\}$为常数列,这与 $a_n-a_{n-1}=d(d\ne 0),{a_n}^2-{a_{n-1}}^2=p(p\ne 0)$ 矛盾,故 D 错误.故选：BC

三、填空题

13. 【详解】由定义知 $|AF|-|AM|=\frac{p}{2}$，所以 $\frac{p}{2}=2$，$p=4$.

14. 【详解】设等比数列的公比为q，$q>0$，$\because$ 在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=8$，$a_5=32$，

$\therefore q^2=\frac{a_5}{a_3}=4$，解得 $q=2$，$\therefore a_n=a_3\cdot 2^{n-3}=2^n$，$\therefore S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，$\because S_n>511$，$\therefore 2^{n+1}>513$，当 $n=8$ 时，$2^{n+1}=2^9=512$，当 $n=9$ 时，$2^{n+1}=2^{10}=1024$，$\therefore$ 正整数 n 的最小值为 9．$\therefore$ 使不等式 $S_n>511$ 成立的正整数 n 的最小值为 9．故答案为：9.

15.【详解】$\because f(x)$ 存在唯一零点，$\therefore x=1$ 是 $y=f(x)$ 的唯一零点，

则 $y=e^x-kx$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点或有唯一零点 $x=1$，

即 $k=\frac{e^x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无解或有唯一解 $x=1$

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

要使 $k=\frac{e^x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无解或有唯一解 $x=1$，只需 $k\le g(x)_{\min}=g(1)=e$.

综上，$k\leqslant e$

16.【详解】：正四面体的体积为 $V_{S-ABC}=a^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times a=\frac{a^3}{3}=8\sqrt{3}$，

表面积为 $S_{表}=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{6})^2=24\sqrt{3}$，设正四面体的内切球半径为 r_1，则 $\frac{1}{3}\times24\sqrt{3}\times r_1=8\sqrt{3}$，解得 $r_1=1$．显然内切球心为 O，故 O 到面 ABC 的距离为 $r_1=1$，球面与面 ABC 相交部分为以 $r_2=\sqrt{R^2-r_1^2}=\sqrt{2}$ 的圆，

设三角形 ABC 的内切圆半径为 r_3，圆心为 O'，D 为 BC 的中点，则 $\angle O'BD=30°$，$BD=\sqrt{6}$，故 $r_3=O'D=\sqrt{2}$，此时恰好 $r_2=r_3$，即球面与各表面相交部分恰为三角形的内切圆，故当 $R=\sqrt{3}$ 时，圆弧总长度为 $4\times2\pi r_2=8\sqrt{2}\pi$．

四、解答题：

17.【详解】(1) 因为 $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3}{2}b$，则 $\frac{a(1+\cos C)+c(1+\cos A)}{2}=\frac{3}{2}b$，……2 分

即 $a+c+a\cos C+c\cos A=3b$，由正弦定理可得

$3\sin B=\sin A+\sin C+(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=\sin A+\sin C+\sin(A+C)$

$=\sin A+\sin C+\sin(\pi-B)=\sin A+\sin C+\sin B$，

因此，$\sin A+\sin C=2\sin B$ …………5 分

(2) 因为 $\sin A+\sin C=2\sin B$，由正弦定理可得 $a+c=2b=4$，

由平面向量数量积的定义可得 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=cb\cos A=3$，…………7 分

所以，$2c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4+c^2-a^2}{2}=3$，可得 $c^2-a^2=2$，

即 $(c-a)(c+a)=4(c-a)=2$，所以，$c-a=\frac{1}{2}$，则 $c=\frac{9}{4}$，$a=\frac{7}{4}$，

18.【详解】：(1) $\because a_n$，S_n，a_n^2 为等差数列，$\therefore 2S_n=a_n+a_n^2$，且，$a_n>0$ 当 $n=1$ 时，$2S_1=2a_1=a_1+a_1^2$，可得 $a_1=1$；当 $n\geqslant2$ 时，$2(S_n-S_{n-1})=2a_n=a_n+a_n^2-a_{n-1}-a_{n-1}^2$，…………2 分

则 $(a_n+a_{n-1})=a_n^2-a_{n-1}^2=(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$，由 $a_n+a_{n-1}>0$，故 $a_n-a_{n-1}=1$，…………4 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差均为 1 的等差数列，故 $a_n=n$．…………6 分

（2）由 $2a_n > m$，即 $2n > m$，即 $m = 2n-1$ 所以 $b_n = 2n-1$ ， ………9 分

所以 $\{b_n\}$ 的前 50 项和为 $1+3+5+\cdots+99=\dfrac{50(1+99)}{2}=2500$． ………12 分

19.（1）由题意得：$P(A)=\dfrac{81+9}{100}=\dfrac{9}{10},P(B)=\dfrac{9}{10},P(\bar{B})=\dfrac{1}{10}$， $P(AB)=\dfrac{9}{100},P(A\bar{B})=\dfrac{81}{100}$

………2 分

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{10},P(A\bar{B})=\dfrac{81}{100}$， $P(\bar{B}|A)=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\dfrac{9}{10}$………4 分

$\therefore L=\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}=\dfrac{1}{9}$……………………………6 分

（2）$\because P(X\le 10)=P(X\ge 90)=\dfrac{1}{10}$

$\because P(10<X<90)=1-2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{5}$，则 $Y\sim B\left(3,\dfrac{4}{5}\right)$………………7 分

$\therefore Y$ 可能的取值为 $0,1,2,3$，

$P(Y=0)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=\dfrac{1}{125},P(Y=1)=C_3^1\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{12}{125}$

$P(Y=2)=C_3^2\left(\dfrac{1}{5}\right)^1\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{48}{125},P(Y=3)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{125}$,

$\therefore Y$ 的分布列为：………………11 分（错一个扣 1 分）

Y	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{64}{125}$

$\therefore$ 数学期望 $E(Y)=3\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{5}$ ………………12 分

20.【详解】:（1）设 AC 的中点为 O，连接 OA_1， OB，

因为 $AB=BC$,所以 $AC\perp OB$，

又因为 $AC\perp A_1B$，因为 $A_1B,OB\subset$ 平面 OBA_1，

且 $A_1B\cap OB=B$，所以 $AC\perp$ 平面 OBA_1…………………（2 分）

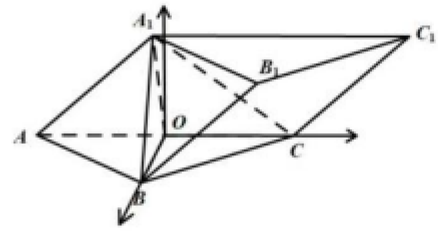
因为 $OA_1\subset$ 平面 OBA_1，所以 $AC\perp OA_1$，

又因为 O 是 AC 中点，所以 $AA_1=A_1C$……………………（4 分）

（2） $A_1A=A_1C=2$，在△ ABC 中，由余弦定理求得 $AC=2\sqrt{3}$，则 $A_1O=BO=2$，又因为 $AC\perp$ 平

面 OBA_1，二面角 A_1-AC-B 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\angle A_1OB=\frac{\pi}{3}$，……………………（6 分）

由（1）知，则以 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 所在直线分别为 x 轴，y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，可得坐标如下：$A_1(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}),C(0,\sqrt{3},0),B_1(\frac{3}{2},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}),C_1(\frac{1}{2},2\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}),B(1,0,0)$.……………（7 分）



设平面 A_1CB_1 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{A_1C}=(-\frac{1}{2},\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{A_1B_1}=(1,\sqrt{3},0)$.

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ x+\sqrt{3}y=0\end{cases}\Rightarrow\vec{m}=(\sqrt{3},-1,-3)$$……………………（9 分）

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，$\overrightarrow{BB_1}=(\frac{1}{2},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$.

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+\sqrt{3}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c=0\\ -a+\sqrt{3}b=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(\sqrt{3},1,-3)$$……………………………………（11 分）

记平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 的夹角为 $\theta,\cos\theta=\frac{|3-1+9|}{\sqrt{13}\sqrt{13}}=\frac{11}{13}$………………（12 分）

21. 【详解】:（1）$f(x)=[\ln^2 x-(a+1)\ln x+1]\cdot x$,

$\therefore f'(x)=[\frac{2\ln x}{x}-\frac{a+1}{x}]x+[\ln^2 x-(a+1)\ln x+1]=\ln^2 x+(1-a)\ln x-a=(\ln x-a)(\ln x+1)$

则两根分别为 $x_1=e^a,x_2=\frac{1}{e}$ ....2 分

1° 当 $a=-1$ 时，$f'(x)\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

2° 当 $a>-1$ 时，则当 $x<\frac{1}{e}$ 或 $x>e^a$ 时 $f'(x)>0$，当 $\frac{1}{e}<x<e^a$ 时 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0,\frac{1}{e}),(e^a,+\infty)$，单调递减区间为 $(\frac{1}{e},e^a)$；

3° 当 $a<-1$ 时，则当 $x<e^a$ 或 $x>\frac{1}{e}$ 时 $f'(x)>0$，当 $e^a<x<\frac{1}{e}$ 时 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0,e^a),(\frac{1}{e},+\infty)$，单调递减区间为 $(e^a,\frac{1}{e})$ ....5 分

（2）由（1）知，若 $a=-1$，则 $f(x)=[\ln^2 x+1]\cdot x$,

$\therefore f'(x)=(\ln x+1)^2\geq 0$，$\therefore f(x)$ 的在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增.

又 $x_1>x_2$，所以 $|f(x_1)-f(x_2)|<m(x_1{}^2-x_2{}^2)$ 对 $\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$ 恒成立

$\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<m(x_1^2-x_2^2)$ 对 $\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$ 恒成立

$\Leftrightarrow f(x_1)-mx_1^2<f(x_2)-mx_2^2$ 对 $\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$ 恒成立 ……………………………………………7 分

令 $h(x)=f(x)-mx^2$，则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $h'(x)\le 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，……9 分

又 $h'(x)=(\ln x+1)^2-2mx$，且 $x>1$,

$2m\ge\dfrac{(\ln x+1)^2}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，$2m\ge[\dfrac{(\ln x+1)^2}{x}]_{\max}$ ……………………………………………10 分

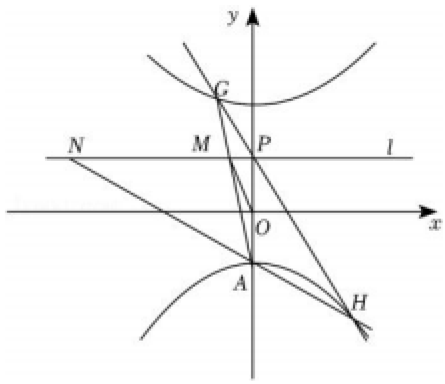
令 $g(x)=\dfrac{(\ln x+1)^2}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{(\ln x+1)(1-\ln x)}{x^2}$

令 $g'(x)>0$ 得 $x\in(1,e)$，令 $g'(x)<0$ 得 $x\in(e,+\infty)$，

$\therefore g(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $2m\ge g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{4}{e}$

$\therefore m\ge\dfrac{2}{e}$ ……………………………………………12 分



22.【详解】(1) 因为实轴长为 4，即 $2a=4$，$a=2$，又 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，

所以 $c=2\sqrt{2},b^2=c^2-a^2=4$，

故 C 的方程为 $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=1$；…………………………4 分

(2) 由 O，A，N，M 四点共圆可知，$\angle ANM+\angle AOM=\pi$，
又 $\angle MOP+\angle AOM=\pi$，即 $\angle ANM=\angle MOP$，

故 $\tan\angle ANM=\tan\angle MOP=\dfrac{1}{\tan\angle OMP}$，

即 $-k_{AN}=\dfrac{1}{-k_{OM}}$，所以 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1$，……………………6 分

设 $G(x_1,\ y_1)$，$H(x_2,\ y_2)$，$M(x_M,\ y_M)$，

由题意可知 $A(0,-2)$，则直线 $AG:y=\dfrac{y_1+2}{x_1}x-2$，

直线 $AH:y=\dfrac{y_2+2}{x_2}x-2$，因为 M 在直线 l，所以 $y_M=t$，

代入直线 AG 方程，可知 $x_M=\dfrac{(t+2)x_1}{y_1+2}$，故 M 坐标为 $(\dfrac{(t+2)x_1}{y_1+2},t)$，……………………7 分

所以 $k_{OM}=\dfrac{t(y_1+2)}{(t+2)x_1}$，又 $k_{AN}=k_{AH}=\dfrac{y_2+2}{x_2}$，

由 $k_{AN}\cdot k_{OM}=1$，则 $\dfrac{t(y_1+2)}{(t+2)x_1}\cdot\dfrac{y_2+2}{x_2}=1$，整理可得 $\dfrac{t+2}{t}=\dfrac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}$，…………………………9 分

当直线GH斜率不存在时，显然不符合题意，

故设直线$GH: y=kx+t$，代入双曲线方程：$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$中，

可得$(k^2-1)x^2+2ktx+t^2-4=0$，所以$x_1+x_2=\frac{-2kt}{k^2-1},x_1x_2=\frac{t^2-4}{k^2-1}$，…………………………10 分

又$(y_1+2)(y_2+2)=(kx_1+t+2)(kx_2+t+2)$

$=k^2x_1x_2+k(t+2)(x_1+x_2)+(t+2)^2=k^2\cdot\frac{t^2-4}{k^2-1}+k(t+2)\cdot\frac{-2kt}{k^2-1}+(t+2)^2=\frac{-(t+2)^2}{k^2-1}$，

所以$\frac{t+2}{t}=\frac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}=\frac{\frac{-(t+2)^2}{k^2-1}}{\frac{t^2-4}{k^2-1}}=\frac{-(t+2)^2}{t^2-4}=\frac{-(t+2)}{t-2}(t+2\neq 0)$，

故$t=2-t$，即$t=1$，所以点P坐标为$(0,1)$．…………………………12 分

自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw