秘密 ★ 启用前【考试时间:2023 年 3 月 28 日 15:00～17:00】

眉山市高中 2023 届第二次诊断性考试

数　学(理工类)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $(1+\mathrm{i})^2z=2+\mathrm{i}$,则 $z=$

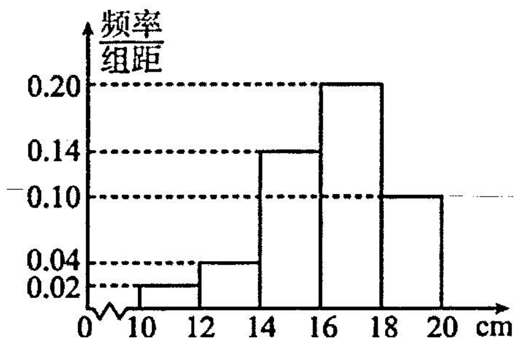
A. $\frac{1}{2}-\mathrm{i}$　　B. $1-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $\frac{1}{2}+\mathrm{i}$　　D. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{i}$

2. 设全集为 $\mathbf{R}$,集合 $A=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}$,$B=\{x|x>1\}$,则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A. $\{x|-3\leqslant x<2\}$　　B. $\{x|-3\leqslant x<1\}$

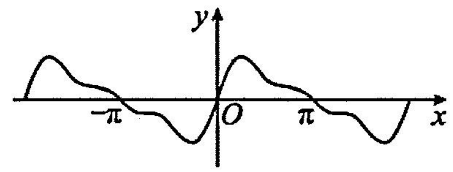
C. $\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x|1<x\leqslant 2\}$

3. 某乡镇为推动乡村经济发展,优化产业结构,逐步打造高品质的农业生产,在某试验区种植了某农作物.为了解该品种农作物长势,在实验区随机选取了 100 株该农作物苗,经测量,其高度(单位:cm)均在区间 $[10,20]$ 内,按照 $[10,12)$,$[12,14)$,$[14,16)$,$[16,18)$,$[18,20]$ 分成 5 组,制成如图所示的频率分布直方图,记高度不低于 16 cm 的为"优质苗".则所选取的农作物样本苗中,"优质苗"株数为



A. 20　　B. 40　　C. 60　　D. 88

4. 数学与音乐有着紧密的关联,我们平时听到的乐音一般来说并不是纯音,而是由多种波叠加而成的复合音.如图为某段乐音的图象,则该段乐音对应的函数解析式可以为



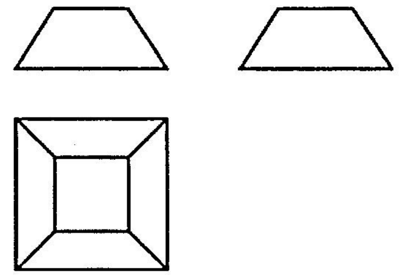
A. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$　　B. $y=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 3x$

C. $y=\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$　　D. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$

5. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=1$,则 $\sin\alpha=$

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 一个四棱台的三视图如图所示,其中正视图和侧视图均为上底长为 2,下底长为 4,腰长为 2 的等腰梯形,则该四棱台的体积为



A. $\frac{28\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{56}{3}$　　C. $28\sqrt{3}$　　D. 56

7. 已知实数 a,b 满足 $\log_2 a<\log_2 b<0$,则下列各项中一定成立的是

A. $\sqrt{a}>\sqrt{b}$　　B. $\sin 2a<\sin 2b$

C. $\log_a \mathrm{e}<\log_b \mathrm{e}$　　D. $a^b<b^a$

8. 已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是正方形,$AB=2$,$AA_1=2\sqrt{2}$,点 B_1 在底面 $ABCD$ 的射影为 BC 中点 H,则直线 AD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{14}}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$. 给出下列结论：① $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 是 $f(x)$ 的最小值；②函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增；③将函数 $y=2\sin x$ 的图象上的所有点向左平移 $\frac{11\pi}{6}$ 个单位长度，可得到函数 $y=f(x)$ 的图象. 其中所有正确结论的序号是

A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

10. 已知直线 $l:y=k(x+2)(k>0)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于点 A,B，以线段 AB 为直径的圆经过定点 $D(2,0)$，则 $|AB|=$

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

11. 在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle A=60°$，将 $\triangle BCD$ 绕对角线 BD 所在直线旋转至 BPD，使得 $AP=\sqrt{6}$，则三棱锥 $P-ABD$ 的外接球的表面积为

A. $\frac{8\pi}{3}$ B. $\frac{20\pi}{3}$ C. $\frac{20\sqrt{15}\pi}{27}$ D. $\frac{25\pi}{3}$

12. 若存在 $x_0\in[-1,2]$，使不等式 $x_0+(e^2-1)\ln a\geqslant\frac{2a}{e^{x_0}}+e^2x_0-2$ 成立，则 a 的取值范围是

A. $\left[\frac{1}{2e},e^2\right]$ B. $\left[\frac{1}{e^2},e^2\right]$

C. $\left[\frac{1}{e^2},e^4\right]$ D. $\left[\frac{1}{e},e^4\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,t)$，$|\overrightarrow{BC}|=1$，则实数 $t=$______.

14. 已知 $(x+a)(x-2)^5$ 的展开式中含 x^3 项的系数为 -60，则 $a=$______.

15. 已知 O 为坐标原点，直线 $y=x+2$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线从左往右顺次交于 A,B 两点. 若 $2|OA|=|OB|$，则双曲线 C 的离心率为______.

16. $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $(2a-c)\cos B=b\cos C$，且 $b=\sqrt{3}$，则 $\triangle ABC$ 周长的最大值为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

某商店销售某种产品，为了解客户对该产品的评价，现随机调查了 200 名客户，其评价结果为“一般”或“良好”，并得到如下列联表：

	一般	良好	合计
男	20	100	120
女	30	50	80
合计	50	150	200

（1）通过计算判断，有没有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系？

（2）该商店在春节期间开展促销活动，该产品共有如下两个销售方案.

方案一：按原价的 8 折销售；

方案二：顾客购买该产品时，可在一个装有 4 张“每满 200 元少 80 元”，6 张“每满 200 元少 40 元”共 10 张优惠券的不透明箱子中，随机抽取 1 张，购买时按照所抽取的优惠券进行优惠.

已知该产品原价为 260（元/件）. 顾客甲若想采用方案二的方式购买一件产品，估计顾客甲需支付的金额；你认为顾客甲选择哪种购买方案较为合理？

附表及公式：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

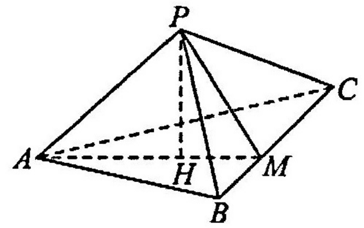
18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，$a_1+a_3=a_4$. $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列，$b_1=3$，$b_3-b_2=18$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_nb_n$，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）



如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，H 为 $\triangle ABC$ 的内心，直线 AH 与 BC 交于 M，$\angle PAB=\angle PAC$，$\angle PCA=\angle PCB$.

（1）证明：平面 $PAM\perp$ 平面 ABC；

（2）若 $AB\perp BC$，$PA=AB=3$，$BC=4$，求二面角 $M-PA-C$ 的余弦值.

20.（12 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $A(0,1)$，$T\left(-\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ 两点，M，N 是椭圆 E 上异于 T 的两动点，且 $\angle MAT=\angle NAT$，若直线 AM，AN 的斜率均存在，并分别记为 k_1，k_2.

（1）求证：k_1k_2 为常数；

（2）求 $\triangle AMN$ 面积的最大值.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x-x^2$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

（1）求 a 的取值范围；

（2）若 $ex_1+(e-2)x_2\geqslant\lambda x_1x_2$，求 λ 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\sqrt{3}t, \\ y=t \end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $4\rho^2\sin^2\theta=3(\rho^2-1)$.

（1）求 C 的直角坐标方程；

（2）设直线 l 与曲线 C 交于 A，B，求 $|AB|$.

23.［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

设函数 $f(x)=|2x-3|+|2x+1|$.

（1）解不等式 $f(x)\leqslant 6-x$；

（2）令 $f(x)$ 的最小值为 T，正数 x，y，z 满足 $x+y+2z=T$，

证明：$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{2}{z+2}\geqslant\dfrac{8}{5}$.