2023年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷满分150分.考试时间 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合$M=\{x\,|\,x+2\geq 0\},N=\{x\,|\,x-1<0\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $\{x\,|\,-2\leq x<1\}$

B. $\{x\,|\,-2<x\leq 1\}$

C. $\{x\,|\,x\geq -2\}$

D. $\{x\,|\,x<1\}$

2. 在复平面内，复数z对应的点的坐标是$(-1,\sqrt{3})$，则z的共轭复数$\overline{z}=$（　　）

A. $1+\sqrt{3}i$

B. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\vec{a}+\vec{b}=(2,3),\vec{a}-\vec{b}=(-2,1)$，则$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

4. 下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是（　　）

A. $f(x)=-\ln x$

B. $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\dfrac{1}{x}$

D. $f(x)=3^{|x-1|}$

5. $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$的展开式中$x$的系数为（　　）.

A. -80　　B. -40　　C. 40　　D. 80

6. 已知抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F，点M在C上．若M到直线$x=-3$的距离为5，则$|MF|=$（　　）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

7. 在$\triangle ABC$中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$（　　）

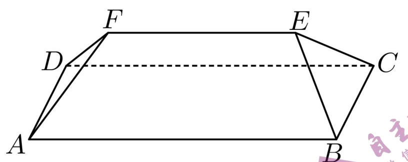
A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 若 $xy \neq 0$，则“$x+y=0$”是“$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-2$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素．安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美．如图，某坡屋顶可视为一个五面体，其中两个面是全等的等腰梯形，两个面是全等的等腰三角形．若 $AB=25\text{m}, BC=AD=10\text{m}$，且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$，则该五面体的所有棱长之和为（　　）



A. 102m　　B. 112m

C. 117m　　D. 125m

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6(n=1,2,3,\cdots)$，则（　　）

A. 当 $a_1=3$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，且存在常数 $M\leqslant 0$，使得 $a_n>M$ 恒成立

B. 当 $a_1=5$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，且存在常数 $M\leq 6$，使得 $a_n<M$ 恒成立

C. 当 $a_1=7$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，且存在常数 $M>6$，使得 $a_n>M$ 恒成立

D. 当 $a_1=9$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，且存在常数 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 已知函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$____________.

12. 已知双曲线 C 的焦点为 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$，离心率为 $\sqrt{2}$，则 C 的方程为____________.

13. 已知命题 p∶若 α,β 为第一象限角，且 $\alpha>\beta$，则 $\tan\alpha>\tan\beta$．能说明 p 为假命题的

一组α,β的值为$\alpha=$_________，$\beta=$ ________.

14. 我国度量衡的发展有着悠久的历史，战国时期就已经出现了类似于砝码的、用来测量物体质量的“环权”．已知9枚环权的质量（单位：铢）从小到大构成项数为9的数列$\left\{a_n\right\}$，该数列的前3项成等差数列，后7项成等比数列，且$a_1=1,a_5=12,a_9=192$，则$a_7=$__________；数列$\left\{a_n\right\}$所有项的和为__________.

15. 设$a>0$，函数$f(x)=\begin{cases}x+2,x<-a,\\ \sqrt{a^2-x^2},-a\le x\le a,\\ -\sqrt{x}-1,x>a.\end{cases}$，给出下列四个结论：

①$f(x)$在区间$(a-1,+\infty)$上单调递减；

②当$a\ge 1$时，$f(x)$存在最大值；

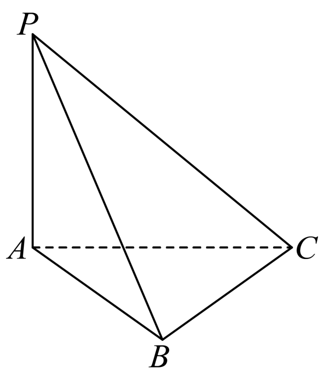
③设$M\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)\left(x_1\le a\right),N\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)\left(x_2>a\right)$，则$|MN|>1$；

④设$P\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)\left(x_3<-a\right),Q\left(x_4,f\left(x_4\right)\right)\left(x_4\ge -a\right)$．若$|PQ|$存在最小值，则$a$的取值范围是$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题：本题共6小题，共85分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16. 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$PA=AB=BC=1$，$PC=\sqrt{3}$．



（1）求证：$BC\perp$平面PAB;

（2）求二面角$A-PC-B$的大小．

17. 设函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（1）若 $f(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ 的值.

（2）已知 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 ω,φ 的值.

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$；

条件②：$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$；

条件③：$f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 为研究某种农产品价格变化的规律，收集得到了该农产品连续 40 天的价格变化数据，如下表所示．在描述价格变化时，用“+”表示“上涨”，即当天价格比前一天价格高；用“-”表示“下跌”，即当天价格比前一天价格低；用“0”表示“不变”，即当天价格与前一天价格相同.

时段	价格变化																			
第 1 天到第 20 天	-	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	-	-	+	-	+	0	0	+
第 21 天到第 40 天	0	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	+	-	-	-	+	0	-	+

用频率估计概率.

（1）试估计该农产品价格“上涨”的概率；

（2）假设该农产品每天的价格变化是相互独立的．在未来的日子里任取 4 天，试估计该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率；

（3）假设该农产品每天的价格变化只受前一天价格变化的影响．判断第 41 天该农产品价格

“上涨”“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大.（结论不要求证明）

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，A、C 分别是 E 的上、下顶点，B，D 分别是 E 的左、右顶点，$|AC|=4$.

（1）求 E 的方程；

（2）设 P 为第一象限内 E 上的动点，直线 PD 与直线 BC 交于点 M，直线 PA 与直线 $y=-2$ 交于点 N. 求证：$MN//CD$.

20. 设函数 $f(x)=x-x^3\mathrm{e}^{ax+b}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$.

（1）求 a,b 的值；

（2）设函数 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（3）求 $f(x)$ 的极值点个数.

21. 已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的项数均为 $m(m>2)$，且 $a_n,b_n\in\{1,2,\cdots,m\}$，$\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n,B_n，并规定 $A_0=B_0=0$. 对于 $k\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，定义

$r_k=\max\{i\,|\,B_i\le A_k,i\in\{0,1,2,\cdots,m\}\}$，其中，$\max M$ 表示数集 M 中最大的数.

（1）若 $a_1=2,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=3,b_3=3$，求 r_0,r_1,r_2,r_3 的值；

（2）若 $a_1\ge b_1$，且 $2r_j\le r_{j+1}+r_{j-1},j=1,2,\cdots,m-1,$，求 r_n；

（3）证明：存在 $p,q,s,t\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.