

2022~2023 学年高三年级模拟试卷

数 学

(满分: 150 分 考试时间: 120 分钟)

2023. 2

一、 选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的选项中只有一个选项符合要求.

1. 设集合 $A = \{x|x < 2\}$, $B = \left\{x \left| \frac{x-1}{x-3} \leq 0 \right.\right\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B =$ ()
 A. (1, 2) B. [1, 2] C. [2, 3) D. [2, 3]
2. 命题 “ $\forall x > 0, x > \frac{1}{x}$ ” 的否定为 ()
 A. $\exists x > 0, x \leq \frac{1}{x}$ B. $\exists x \leq 0, x \leq \frac{1}{x}$ C. $\forall x > 0, x \leq \frac{1}{x}$ D. $\forall x \leq 0, x \leq \frac{1}{x}$
3. 若复数 $z = \frac{a+3i}{3+i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数, 则 $z =$ ()
 A. -1 B. -i C. -ai D. 3i
4. 已知两个单位向量 a, b 满足 $(2b-a) \perp (2a-b)$, 则 a 与 b 的夹角的余弦值为 ()
 A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
5. 已知正三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 与以 $\triangle ABC$ 的外接圆为底面的圆柱的体积相等, 则正三棱柱与圆柱的侧面积的比值为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{\pi}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. 2
6. 设 $C_n^0 (x+2)^n - C_n^1 (x+2)^{n-1} + C_n^2 (x+2)^{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} =$ ()
 A. $2^{n-1} - 2$ B. $2^{n-1} - 1$ C. $2^n - 2$ D. $2^n - 1$
7. 下表提供了某厂进行技术改造后生产产品过程中记录的产量 x (单位: 吨) 与相应的生产能耗 y (单位: 吨标准煤) 的几组对应数据:

x /吨	3	4	5	6
y /吨标准煤	2.5	3	4	4.5

已知该厂技术改造前 100 吨产品的生产能耗为 90 吨标准煤, 试根据以上数据求出的线性回归方程, 预测该厂技术改造后 100 吨产品的生产能耗比技术改造前降低了 ()

参考公式: 在线性回归方程 $y_{\wedge} = a_{\wedge} + b_{\wedge}x$ 中, $b_{\wedge} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - nxy}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - nx^2}$, $a_{\wedge} = y - b_{\wedge}x$, 其中 \bar{x}, \bar{y}

为样本平均值.

- A. 19.65 吨标准煤 B. 29.65 吨标准煤
 C. 70.35 吨标准煤 D. 90 吨标准煤
8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |e^x - 1|, & x \leq 1, \\ \ln \frac{x+x}{x-1}, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(x)) = 1$ 解的个数为 ()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、 选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某次测试, 经统计发现测试成绩服从正态分布, 函数 $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 10}} e^{-\frac{(x-90)^2}{200}}$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象为其正态密度曲线, 则下列说法正确的是 ()

- A. 这次测试的平均成绩为 90
 B. 这次测试的成绩的方差为 10
 C. 分数在 110 分以上的人数与分数在 80 分以下的人数相同
 D. 分数在 120 分以上的人数与分数在 60 分以下的人数大致相同

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线的右支上, 则下列

列说法正确的是()

- A. 若直线 PF_1 的斜率为 k , 则 $|k| \in [0, \frac{3}{4})$
 B. 使得 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形的 P 有且仅有四个
 C. 点 P 到两条渐近线的距离乘积为 $\frac{144}{25}$
 D. 已知点 $Q(7, 5)$, 则 $F_2P + PQ$ 的最小值为 5
 11. 已知函数 $f(x) = 2x - \tan x$, 则下列结论正确的是()
 A. 函数 $f(x)$ 不是周期函数
 B. 函数 $f(x)$ 的图象只有一个中心对称点
 C. 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4})$, $k \in \mathbf{Z}$
 D. 曲线 $y = f(x)$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) 只有一条过点 $(1, 0)$ 的切线

12. 若棱长为 a 的正方体 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ 的顶点都在半径为 R 的球面上, 球面上点 P 与球心 O 分别位于平面 $ABCD$ 的两侧, 且四棱锥 $PABCD$ 是侧棱长为 l 的正四棱锥. 记正四棱锥 $PABCD$ 的侧棱与直线 AB 所成的角为 α , 与底面 $ABCD$ 所成的角为 β , 则下列说法正确的是()

- A. $15^\circ < \alpha < 45^\circ$ B. $15^\circ < \beta < 45^\circ$ C. $R = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ D. $l = \frac{4}{5} a$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 数据 23, 76, 45, 37, 58, 16, 28, 15, 53, 24, 42, 36 的 25 百分位数是_____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 到直线 $x = -2$ 与到点 $F(2, 0)$ 的距离相等, 点 Q 在圆 $(x-10)^2 + y^2 = 25$ 上, 则 PQ 的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + x^2$, 则不等式 $f(x+1) + f(x-1) < 2x^2 + 2$ 的解集为_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $n^2 a_{n+1} = 2(n+1)^2 a_n$. 记 $b_n = \frac{1}{2} a_{n+1} - a_n$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____; $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

设甲袋中有 3 个白球和 4 个红球, 乙袋中有 1 个白球和 2 个红球. 现从甲袋中任取 2 个球放入乙袋, 再从乙袋中任取 2 个球.

- (1) 记从甲袋中取出的 2 个球中恰有 X 个白球, 求随机变量 X 的概率分布和数学期望;
 (2) 求从乙袋中取出的 2 个球中恰有 1 个红球的概率.

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 1$, $a_1 + a_2 = b_3$, $15a_1 + a_9 = b_6$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = \log_2 b_{n+1}$, 求数列 $\left\{ \frac{c_n^2}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 S_n .

19.(本小题满分 12 分)

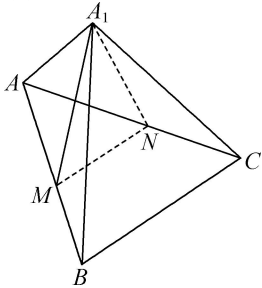
已知锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 边 AB 上的高 CD 为 1, 且 $c^2 = ab \cos C$.

- (1) 求证: $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} = \frac{1}{\tan C}$;
- (2) 求 AB 的最小值.

20.(本小题满分 12 分)

如图, 在边长为 4 的等边三角形 ABC 中, 平行于 BC 的直线分别交线段 AB, AC 于点 M, N . 将 $\triangle AMN$ 沿着 MN 折起至 $\triangle A_1MN$, 使得二面角 A_1MNB 是直二面角.

- (1) 若平面 $A_1MN \cap$ 平面 $A_1BC = l$, 求证: $l \parallel BC$;
- (2) 若三棱锥 A_1AMN 的体积为 1, 求二面角 NA_1MB 的正弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知点 $P(2, -1)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, C 的长轴长为 $4\sqrt{2}$, 直线 $l: y =$

$kx + m$ 与 C 交于 A, B 两点, 直线 PA, PB 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$.

- (1) 求证: k 为定值;
- (2) 若直线 l 与 x 轴交于点 Q , 求 $QA^2 + QB^2$ 的值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 3ax + 1 - a^2$, $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 设函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 若过点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 的直线恒在函数 $g(x) = x \cdot e^x - \ln x + x$ 图象的下方, 求实数 a 的取值范围.

