

永州一中 2023 年高三元月大联考
数学

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	D	B	A	C	A	A	ABD	BCD	BC	AB

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $x + y - e + 1 = 0$ 【解析】求导可得 $f'(x) = \ln x - 1$ ，则 $f'(1) = -1$ ，又 $f(1) = -2 + e$ ，
则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y - (-2 + e) = -(x - 1)$ ，整理，得 $y = -x + e - 1$.
故填 $x + y - e + 1 = 0$.

14. -16 【解析】由二项式定理，可得 $(\sqrt{x} - 1)^5$ 的展开式通项为
 $T_{r+1} = C_5^r (\sqrt{x})^{5-r} (-1)^r$ ， $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ，当 $5 - r = 0, 2, 4$ ，即 $r = 5, 3, 1$ 时， T_{r+1} 为有理项，
所以所有有理项的系数之和为 $(-1)^5 \times C_5^5 + (-1)^3 \times C_5^3 + (-1) \times C_5^1 = -(1 + 10 + 5) = -16$. 故
填 -16.

15. $-2 - \sqrt{3}$ 【解析】 $\because 5\sin x = 2 + \cos 2x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\therefore 5\sin x = 3 - 2\sin^2 x$ ，即

$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ ， $\therefore \sin x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin x = -3$ (舍去)，

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ ， $\therefore \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$. 故填 $-2 - \sqrt{3}$.

16. $\frac{1}{2}$ 【解析】设半焦距为 c ，延长 F_2M 交 PF_1 于点 N ，由于 PM 是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，
 $F_2M \perp PM$ ，所以 $\triangle NPF_2$ 是等腰三角形，所以 $|PN| = |PF_2|$ ，且 M 是 NF_2 的中点. 根据双
曲线的定义可知 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，即 $|NF_1| = 2a$ ，由于 O 是 F_1F_2 的中点，所以 MO 是
 $\triangle NF_1F_2$ 的中位线，所以 $|MO| = \frac{1}{2}|NF_1| = a = \sqrt{2}$ ，又双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，所以

$c = \sqrt{3}, b = 1$ ，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ ，根据题意，知所求的是双曲线右支上

一点到直线 $y = x$ 的距离的最小值的平方. 设与直线 $y = x$ 平行的直线方程为 $y = x + h$ ，联

立 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \\ y = x + h \end{cases}$ ，消去 y ，可得 $x^2 + 4hx + 2h^2 + 2 = 0$ ，所以 $\Delta = (4h)^2 - 4(2h^2 + 2) = 0$ ，

所以 $h = -1$ 或 1 (舍去)，所以切点到直线 $y = x$ 的距离为 $\frac{|-1 - 0|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$. 故填 $\frac{1}{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

【解析】(1) 由 $\frac{2}{3}S_n = a_n - \frac{2}{3}n - 2$, 得 $2S_n = 3a_n - 2n - 6$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 2(n-1) - 6$ ②,

①-②整理得 $a_n = 3a_{n-1} + 2$, $\therefore a_n + 1 = 3(a_{n-1} + 1)$,

当 $n=1$ 时, $2a_1 = 3a_1 - 8$, $\therefore a_1 = 8$, 即 $a_1 + 1 = 9$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 9 为首项, 3 为公比的等比数列.

(2) 由 (1) 可知 $a_n + 1 = 9 \cdot 3^{n-1}$,

$\therefore a_n = 3^{n+1} - 1$, 即 $b_n = \frac{1}{3^{n+1} + 1}$,

$\therefore T_n = \frac{1}{3^2 + 1} + \frac{1}{3^3 + 1} + \cdots + \frac{1}{3^{n+1} + 1} < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n+1}} =$

$\frac{\frac{1}{9} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] < \frac{1}{6}$.

18. (12 分)

【解析】(1) $\because S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \sin A = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{2}$, $\therefore AC = 2$.

$\therefore$ 由余弦定理, 得 $DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 13 - 6\sqrt{3}$,

$\therefore BD^2 + AC^2 = DC^2 + AC^2 = 17 - 6\sqrt{3}$.

(2) 设 $\angle B = \theta$, $\therefore \angle DCB = \theta$, $\angle ADC = 2\theta$, $\angle ACD = \pi - \frac{\pi}{6} - 2\theta = \frac{5\pi}{6} - 2\theta$.

由 $\triangle BCD$ 是等腰三角形及 $\angle ACD > 0$ 可得 $\begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{6} - 2\theta > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < \theta < \frac{5\pi}{12}$.

在 $\triangle ADC$ 内, 由正弦定理, 得 $\frac{DC}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\sin \left(\frac{5\pi}{6} - 2\theta \right)}$,

在 $\triangle BDC$ 内, 由正弦定理, 得 $\frac{BC}{\sin 2\theta} = \frac{DC}{\sin \theta}$,

$\therefore DC = \frac{\frac{3}{2}}{\sin \left(\frac{5\pi}{6} - 2\theta \right)} = \frac{3 \sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{3}{2 \cos \theta}$,

$\therefore \sin \left(\frac{5\pi}{6} - 2\theta \right) = \cos \theta$,

$$\text{即 } \frac{5\pi}{6} - 2\theta + \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6} - 2\theta - \theta = \frac{\pi}{2}, \therefore \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \theta = \frac{\pi}{9}.$$

$$\therefore \angle B \text{ 的大小为 } \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{\pi}{9}.$$

19. (12 分)

【解析】(1) 零假设为 H_0 : 用户使用哪家购物平台购物与观看这两家短视频的用户的年龄无关.

$$\begin{aligned} \text{根据列联表可得 } \chi^2 &= \frac{100 \times (40 \times 30 - 20 \times 10)^2}{60 \times 40 \times 50 \times 50} \\ &= \frac{50}{3} \approx 16.667 > 10.828 = \chi_{\alpha=0.001}^2, \end{aligned}$$

所以根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 即用户使用哪家购物平台购物与观看这两家短视频的用户的年龄有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.001.

(2) (i) 设 A_1 = “第一天去甲平台购物”, B_1 = “第一天去乙平台购物”,

A_2 = “第二天去甲平台购物”, 根据题意得

$$P(A_1) = P(B_1) = 0.5, P(A_2 | A_1) = 0.7, P(A_2 | B_1) = 0.8,$$

$$\text{则 } P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(B_1)P(A_2 | B_1) = 0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.8 = 0.75.$$

(ii) 当 $0 < p < 1$ 时, 由题意知 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 $X \sim B(3, p)$,

$$\text{所以 } E(X) = 3p,$$

$$\text{所以 } E(X) = 3p \geq 1, \text{ 所以 } \frac{1}{3} \leq p < 1,$$

$$\text{故 } p \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{1}{3}, 1 \right).$$

20. (12 分)

【解析】(1) $\because BM \parallel CD$, 又 $BM \not\subset$ 平面 $A'CD$, $CD \subset$ 平面 $A'CD$, $\therefore BM \parallel$ 平面 $A'CD$.
又 $BM \subset$ 平面 $A'MB$, 平面 $A'MB \cap$ 平面 $A'CD = l$, $\therefore l \parallel BM$,
 $\therefore l \not\subset$ 平面 $BMDC$, $BM \subset$ 平面 $BMDC$, $\therefore l \parallel$ 平面 $BMDC$.

(2) 假设存在点 P .

由题意知 $3AM = MB$, $AB = 4$, $\therefore AM = 1$, $MB = 3$,

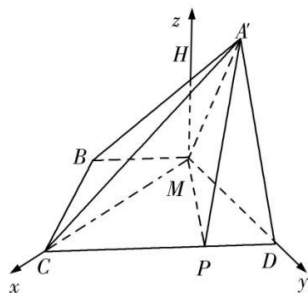
又 $BC = AD = \sqrt{3}$, $\therefore$ 由勾股定理可得 $CM = 2\sqrt{3}$, $MD = 2$,

$$\therefore CM^2 + MD^2 = CD^2, \therefore CM \perp MD.$$

又平面 $A'MD \perp$ 平面 $BMDC$, 平面 $A'MD \cap$ 平面 $BMDC = MD$, $CM \subset$ 平面 $BMDC$,

$\therefore CM \perp$ 平面 $A'MD$,

过点 M 作垂直于平面 $BMDC$ 的直线 MH , 以 M 点为原点, 分别以 MC, MD, MH 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $M(0,0,0), C(2\sqrt{3},0,0), D(0,2,0), A'\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则

$$\overrightarrow{MA'} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{MC} = (2\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{CD} = (-2\sqrt{3}, 2, 0),$$

设 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 $A'MC$ 的法向量, $\therefore \overrightarrow{MC} \cdot \vec{n} = 0, \overrightarrow{MA'} \cdot \vec{n} = 0$,

$$\therefore \begin{cases} 2\sqrt{3}x_1 = 0 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 则 } x_1 = 0, \text{ 令 } y_1 = \sqrt{3}, \text{ 则 } z_1 = -1,$$

$\therefore \vec{n} = (0, \sqrt{3}, -1)$ 为平面 $A'MC$ 的一个法向量.

设 $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CD}$, 由题意, 知 $\lambda \in (0, 1)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{MC} + \lambda \overrightarrow{CD} = (2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda, 2\lambda, 0),$$

设 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 $A'MP$ 的法向量, $\therefore \overrightarrow{MP} \cdot \vec{m} = 0, \overrightarrow{MA'} \cdot \vec{m} = 0$,

$$\therefore \begin{cases} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda)x_2 + 2\lambda y_2 = 0 \\ \frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y_2 = \sqrt{3}, \text{ 则 } x_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1}, z_2 = -1,$$

则 $\vec{m} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}, \sqrt{3}, -1\right)$ 为平面 $A'MP$ 的一个法向量,

$$\text{由 } |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 得 } \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2 + 4} = \sqrt{5},$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2} \in (0, 1)$.

$\therefore$ 在线段 DC (不包含端点) 上存在一点 P , 使得平面 $A'MP$ 与平面 $A'MC$ 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 此时点 P 为线段 DC 的中点. 公众号: 高中试卷君

21. (12 分)

【解析】(1) 如图, 当直线 $x = n$ 与椭圆 C 相交于 A', B' 两点, 与 x 轴交于 G 点时,

连接 $A'F_2$, 由椭圆定义可知 $|A'F_1| + |A'F_2| = 2a$, 显然 $|A'F_2| \leq |A'G|$,

同理可知, $|B'F_1| + |B'F_2| = 2a$, 显然 $|B'F_2| \geq |B'G|$,

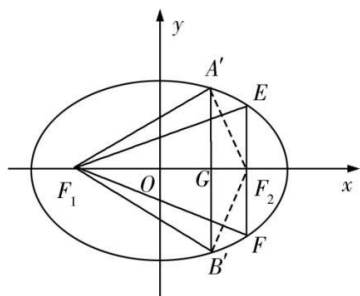
所以当直线 $x = n$ 经过焦点 F_2 时, $\triangle EF_1F$ 的周长最大,

最大值为 $4a = 8$, 所以 $a = 2$.

此时 $|EF_2| = \frac{1}{2}|EF| = \frac{3}{2}$, 则 $|EF_1| = 2a - |EF_2| = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, $|F_1F_2| = \sqrt{|EF_1|^2 - |EF_2|^2} = 2$,

即 $c = 1, b = \sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.



(2) 设直线 l 的方程为 $x = my + 1 (m \neq 0)$, 与椭圆 C 方程联立得

$$(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$,

可得 $y_1 + y_2 = \frac{2m}{3} y_1 \cdot y_2$,

又 $k_1 = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1}$, 所以直线 AP 的方程为 $y - \frac{3}{2} = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1}(x - 1)$,

令 $x = 4$, 得 $Q\left(4, \frac{3my_1 + 6y_1 - 9}{2my_1}\right)$,

$$k_2 = \frac{y_2 - \frac{3my_1 + 6y_1 - 9}{2my_1}}{x_2 - 4} = \frac{2my_1y_2 - 3my_1 - 6y_1 + 9}{2m^2y_1y_2 - 6my_1},$$

$$\begin{aligned} |k_1 - k_2| &= \left| \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} - \frac{2my_1y_2 - 3my_1 - 6y_1 + 9}{2m^2y_1y_2 - 6my_1} \right| \\ &= \left| \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{my_1} - \frac{2my_1y_2 - 3my_1 - 6y_1 + 9}{2m^2y_1y_2 - 6my_1} \right| = \left| \frac{\left(y_1 - \frac{3}{2}\right)(2my_2 - 6) - 2my_1y_2 + 3my_1 + 6y_1 - 9}{2my_1(my_2 - 3)} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{3y_1 - 3y_2}{2my_1y_2 - 6y_1} \right| = \left| \frac{3y_1 - 3y_2}{2m \frac{3(y_1 + y_2)}{2m} - 6y_1} \right| = \left| \frac{3y_1 - 3y_2}{3y_2 - 3y_1} \right| = 1$$

所以 $|k_1 - k_2|$ 为定值, 值为 1.

22. (12 分)

【解析】(1) 求导, 得 $f'(x) = e^x - a$.

若 $a \leq 0$, 则对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 此时 $f(x)$ 无极值.

若 $a > 0$, 令 $f'(x) = e^x - a = 0$, 得 $x = \ln a$.

当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 存在极小值.

综上所述, 若函数 $f(x)$ 存在极值, 则实数 a 的取值范围是 $(0, +\infty)$.

(2) 不等式 $xf'(x) \geq a \ln x + 1$ 恒成立, 即 $xe^x - ax \geq a \ln x + 1$ 恒成立.

方法一: 设 $F(x) = xe^x - a(x + \ln x) - 1$, 则 $F'(x) = \frac{x+1}{x}(xe^x - a)$, $x \in (0, +\infty)$,

当 $a > 0$ 时, 令 $h(x) = xe^x - a$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $h'(x) = (x+1)e^x > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(0) = -a < 0$, $h(a) = ae^a - a = a(e^a - 1) > 0$,

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0 \in (0, a)$, 使得 $h(x_0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, $F'(x) < 0$,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, $F'(x) > 0$.

$\therefore F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(x_0) = 0$, 即 $x_0 e^{x_0} = a$, 两边取对数得 $x_0 + \ln x_0 = \ln a$,

$\therefore F(x)$ 的最小值为 $F(x_0) = x_0 e^{x_0} - a(x_0 + \ln x_0) - 1$,

$\therefore F(x_0) = x_0 e^{x_0} - a(x_0 + \ln x_0) - 1 = a - a \ln a - 1$.

令 $G(x) = x - x \ln x - 1$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $G'(x) = -\ln x$,

$\therefore G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore G(x) \leq G(1) = 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立.

$\therefore$ 当且仅当 $a = 1$ 时, $F(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

综上, $a = 1$.

方法二: 设 $h(x) = x + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$,

易知 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又当 $x \in (0, 1)$ 时, $x + \ln x < 1 + \ln x$, $\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $y = x + \ln x \in (-\infty, 1)$.

当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $y = x + \ln x \in [1, +\infty)$.

$\therefore h(x) = x + \ln x$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

$\therefore$ 对于 $\mathbf{R}$ 上任意一个值 y_0 , 都有唯一的一个正数 x_0 , 使得 $y_0 = x_0 + \ln x_0$.

$xe^x - ax \geq a \ln x + 1$, 即 $xe^x - ax - a \ln x - 1 \geq 0$,

即 $e^{x+\ln x} - a(x + \ln x) - 1 \geq 0$.

设 $F(t) = e^t - at - 1, t \in \mathbf{R}$,

$\therefore$ 要使 $e^{x+\ln x} - a(x + \ln x) - 1 \geq 0$, 只需 $F(t)_{\min} \geq 0$.

$a > 0$ 时, 当 $t \in (-\infty, \ln a)$ 时, $F'(t) = e^t - a < 0$, $F(t)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减;

当 $t \in (\ln a, +\infty)$ 时, $F'(t) = e^t - a > 0$, $F(t)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore F(t)_{\min} = F(\ln a) = a - a \ln a - 1$.

设 $m(x) = x - x \ln x - 1, x \in (0, +\infty)$,

则 $m'(x) = -\ln x$, 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$m'(x) > 0$, $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore m(x)_{\max} = m(1) = 0$, $\therefore m(a) \leq 0, F(t)_{\min} \leq 0$, 当且仅当 $a = 1$ 时, 等号成立.

又 $F(t)_{\min} \geq 0$, $\therefore F(t)_{\min} = 0$, $\therefore a = 1$.

综上, $a = 1$.

说明:

第(2)问另解: 不等式 $xf'(x) \geq a \ln x + 1$ 恒成立,

即 $xe^x - a(x + \ln x) - 1 = xe^x - a \ln(xe^x) - 1 \geq 0$ 恒成立, 令 $t = xe^x (t > 0)$, 令

$\varphi(t) = t - a \ln t - 1$,

$\varphi'(t) = 1 - \frac{a}{t} = \frac{t-a}{t}$, 当 $t \in (a, +\infty)$, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(t)$ 单调递增, 当

$t \in (0, a)$, $\varphi'(t) < 0$, $\varphi(t)$ 单调递减, $\therefore \varphi(t) \geq \varphi(a) = a - a \ln a - 1$, 设

$m(x) = x - x \ln x - 1, x \in (0, +\infty)$,

则 $m'(x) = -\ln x$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore m(x)_{\max} = m(1) = 0$, $\therefore m(a) \leq 0, \varphi(t)_{\min} \leq 0$, 当且仅当 $a = 1$ 时, 等号成立.

又 $\varphi(t)_{\min} \geq 0$, $\therefore \varphi(t)_{\min} = 0$, $\therefore a = 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线