绝密★启用前

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数　学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

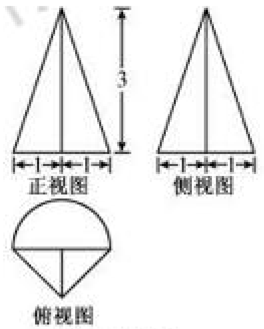
1.已知集合 $P=\{x|-1<x<1\}$，$Q=\{x|0<x<2\}$，那么 $P\cup Q=$

A.（-1,2）　　B.（0，1）　　C.（-1,0）　　D.（1,2）

2.椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的离心率是

A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{9}$

3.某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是



（第 3 题图）

A. $\frac{\pi}{2}+1$　　B. $\frac{\pi}{2}+3$　　C. $\frac{3\pi}{2}+1$　　D. $\frac{3\pi}{2}+3$

4.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geq 0\\ x+y-3\geq 0\\ x-2y\leq 0\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的取值范围是

A.[0,6]　　B. [0,4]　　C.[6, $+\infty$）　　D.[4, $+\infty$）

5.若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间[0,1]上的最大值是 M,最小值是 m,则 M-m

A. 与 a 有关，且与 b 有关　　B. 与 a 有关，但与 b 无关

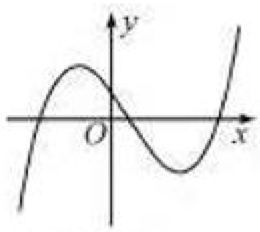
C. 与 a 无关，且与 b 无关　　D. 与 a 无关，但与 b 有关

6. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为S_n，则“d>0”是"$S_4+S_6>2S_5$"的

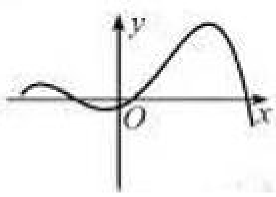
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

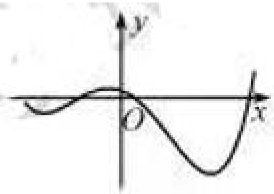
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

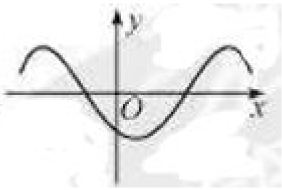
7. 函数 $y=f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图像如图所示，则函数 $y=f(x)$的图像可能是

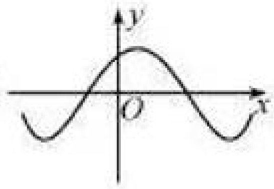


（第 7 题图）

A. 

B. 

C. 

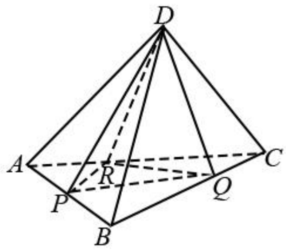
D. 

8．已知随机变量ξ_i满足 P（$\xi_i=1$）$=p_i$，P（$\xi_i=0$）$=1-p_i$，$i=1$，2. 若$0<p_1<p_2<\frac{1}{2}$，则

A. $E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$D(\xi_1)<D(\xi_2)$　　B. $E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$D(\xi_1)>D(\xi_2)$

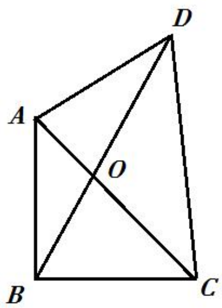
C. $E(\xi_1)>E(\xi_2)$，$D(\xi_1)<D(\xi_2)$　　D. $E(\xi_1)>E(\xi_2)$，$D(\xi_1)>D(\xi_2)$

9．如图，已知正四面体 $D-ABC$（所有棱长均相等的三棱锥），P，Q，R分别为 AB，BC，CA 上的点，$AP=PB$，$\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RA}=2$，分别记二面角 $D-PR-Q$，$D-PQ-R$，$D-QR-P$的平面角为 α，β，γ，则



A. $\gamma<\alpha<\beta$　　B. $\alpha<\gamma<\beta$　　C. $\alpha<\beta<\gamma$　　D. $\beta<\gamma<\alpha$

10．如图，已知平面四边形 $ABCD$，$AB\perp BC$，$AB=BC=AD=2$，$CD=3$，AC 与 BD 交于点 O，记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，则



A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_1<I_3<I_2$　　C. $I_3<I_1<I_2$　　D. $I_2<I_1<I_3$

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11．我国古代数学家刘徽创立的“割圆术”可以估算圆周率 π，理论上能把 π 的值计算到任意精度。祖冲之继承并发展了“割圆术”，将 π 的学科.网值精确到小数点后七位，其结果领先世界一千多年，“割圆术”的第一步是计算单位圆内接正六边形的面积 S_6，S_6=______。

12．已知 a，$b\in$R，$(a+b\mathrm{i})^2=3+4\mathrm{i}$（i 是虚数单位）则 $a^2+b^2=$ ______，ab=________。

13．已知多项式 $(x+1)^3(x+2)^2=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x^1+a_5$，则 a_4=______________，a_5=________.

14. 已知△ABC，$AB=AC=4$，$BC=2$． 点 D 为 AB 延长线上一点，BD=2，连结 CD，则△BDC 的面积是____________，$\cos\angle BDC=$___________．

15. 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1, |\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是___________，最大值是______。

16. 从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人，副队长 1 人，普通队员 2 人组成 4 人服务队，要求服务队中至少有 1 名女生，共有________种不同的选法．(用数字作答)

17. 已知 $a\in\boldsymbol{R}$，函数 $f(x)=\left|x+\frac{4}{x}-a\right|+a$ 在区间[1, 4]上的最大值是 5，则 a 的取值范围是__________

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x\,(x\in\boldsymbol{R})$

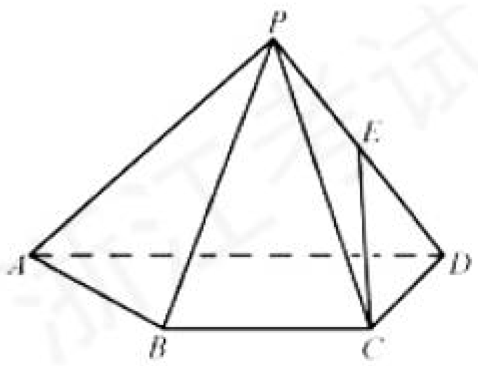
(I) 求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值

(II) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间．

19. (本题满分 15 分) 如图，已知四棱锥 P-ABCD，△PAD 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，BC∥AD，CD⊥AD，PC=AD=2DC=2CB, E 为 PD 的中点．

(I) 证明：CE∥平面 PAB；

(II) 求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值



(第 19 题图)

20. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x)=\left(x-\sqrt{2x-1}\right)e^{-x}\left(x\geq\frac{1}{2}\right)$

（I）求 $f(x)$ 的导函数

（II）求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上的取值范围

21. （本题满分 15 分）如图，已知抛物线 $x^2=y$. 点 A $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，$B\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$，抛物线上的点 P（x, y）$\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right)$，过点 B 作直线 AP 的垂线，垂足为 Q

（I）求直线 AP 斜率的取值范围；

（II）求 $|PA|\cdot|PQ|$ 的最大值

22. （本题满分 15 分）已知数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=1$，$x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\left(n\in N^*\right)$

证明：当 $n\in N^*$ 时

（I）$0<x_{n+1}<x_n$；

（II）$2x_{n+1}-x_n\le\frac{x_nx_{n+1}}{2}$；

（III）$\frac{1}{2^{n-1}}\le x_n\le\frac{1}{2^{n-2}}$

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数学参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 4 分，满分 40 分。

1. A　2. B　3. A　4. D　5. B　6. C　7. D　8. A　9. B　10. C

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，满分 36 分。

11. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　12. 5, 2　13. 16. 4　14. $\frac{\sqrt{15}}{2}$，$\frac{\sqrt{10}}{4}$　15. 4,

$2\sqrt{5}$　16. 660　　17. $\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。

18. 本题主要考查三角函数的性质及其变换等基础知识，同时考查运算求解能力。满分 14 分。

（I）由 $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ 得 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2$

（II）由 $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$ 与 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 得

$f\left(x\right)=-\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期是 π

由正弦函数的性质得

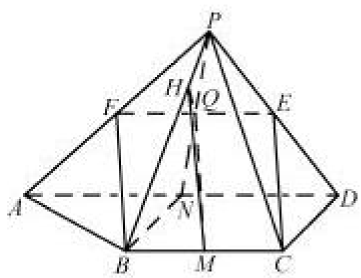
$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}$

解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\boldsymbol{Z}$

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right]k\in\boldsymbol{Z}$

19. 本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分 15 分。

（Ⅰ）如图，设 PA 中点为 F，连结 EF，FB.



因为 E，F 分别为 PD，PA 中点，所以 $EF/\!/AD$ 且 $EF=\frac{1}{2}AD$，

又因为 $BC/\!/AD$，$BC=\frac{1}{2}AD$，所以

$EF/\!/BC$ 且 $EF=BC$，

即四边形 $BCEF$ 为平行四边形，所以 $CE/\!/BF$，

因此 $CE/\!/$ 平面 PAB.

（Ⅱ）分别取 BC，AD 的中点为 M，N. 连结 PN 交 EF 于点 Q，连结 MQ.

因为 E，F，N 分别是 PD，PA，AD 的中点，所以 Q 为 EF 中点，

在平行四边形 $BCEF$ 中，$MQ/\!/CE$.

由△PAD 为等腰学科&网直角三角形得

$PN\perp AD$.

由 $DC\perp AD$，N 是 AD 的中点得

$BN\perp AD$.

所以 $AD\perp$ 平面 PBN，

由 $BC/\!/AD$ 得 $BC\perp$ 平面 PBN，

那么，平面 $PBC\perp$ 平面 PBN.

过点 Q 作 PB 的垂线，垂足为 H，连结 MH.

MH 是 MQ 在平面 PBC 上的射影，所以∠QMH 是直线 CE 与平面 PBC 所成的角.

设 $CD=1$.

在△PCD 中，由 $PC=2$，$CD=1$，$PD=\sqrt{2}$ 得 $CE=\sqrt{2}$，

在△PBN 中，由 $PN=BN=1$，$PB=\sqrt{3}$ 得 $QH=\frac{1}{4}$，

在 Rt△MQH 中，$QH=\frac{1}{4}$，$MQ=\sqrt{2}$，

所以 $\sin\angle QMH=\frac{\sqrt{2}}{8}$，

所以，直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

20. 本题主要考查函数的最大（小）值，导数的运算及其应用，同时考查分析问题和解决问

题的能力。满分 15 分。

（Ⅰ）因为 $\left(x-\sqrt{2x-1}\right)'=1-\frac{1}{\sqrt{2x-1}},(e^{-x})'=-e^{-x}$

所以$f'(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)e^{-x}-(x-\sqrt{2x-1})e^{-x}$

$=\frac{(1-x)(\sqrt{2x-1}-2)e^{-x}}{\sqrt{2x-1}}(x>\frac{1}{2}).$

（Ⅱ）由$f'(x)=\frac{(1-x)(\sqrt{2x-1}-2)e^{-x}}{\sqrt{2x-1}}=0$

解得

$x=1$ 或 $x=\frac{5}{2}.$

因为

x	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}，1)$	1	$(1，\frac{5}{2})$	$\frac{5}{2}$	$(\frac{5}{2}，+\infty)$
$f'(x)$		−	0	+	0	−
$f(x)$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0	↗		↘

又 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2e^{-x}\geq 0$，

所以 $f(x)$ 在区间$[\frac{1}{2}，+\infty)$上的取值范围是$[0,\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}]$.

21. 本题主要考查直线方程、直线与抛物线的位置关系等基础知识，同时考查解析几何的基本思想方法和运算求解能力。满分 15 分。

（Ⅰ）设直线 AP 的斜率为 k,

$$k=\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}=x-\frac{1}{2},$$

因为$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，所以直线 AP 斜率的取值范围是（-1，1）。

（Ⅱ）联立直线 AP 与 BQ 的方程

$$\begin{cases}kx-y+\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}=0,\\ x+ky-\frac{9}{4}k-\frac{3}{2}=0,\end{cases}$$

解得点 Q 的横坐标是

$$x_Q=\frac{-k^2+4k+3}{2(k^2+1)}$$

因为

$$|PA|=\sqrt{1+k^2}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1+k^2}(kx+1)$$

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}(x_Q-x)=-\frac{(k-1)(k+1)^2}{\sqrt{k^2+1}},$$

所以

$$|PA|\bullet|PQ|=-(k-1)(k+1)^3$$

令 $f(k)=-(k-1)(k+1)^3$，

因为

$$f'(k)=-(4k-2)(k+1)^2,$$

所以 $f(k)$ 在区间（-1，$\frac{1}{2}$）上单调递增，（$\frac{1}{2}$，1）上单调递减，

因此当 $k=\frac{1}{2}$ 时，$|PA|\bullet|PQ|$ 取得最大值 $\frac{27}{16}$

22. **本题主要考查数列的概念、递推关系与单调性等基础知识，不等式及其应用，同时考查推理论证能力、分析问题和解决问题的能力。满分 15 分。**

（Ⅰ）用数学归纳法证明：$x_n>0$

当 $n=1$ 时，$x_1=1>0$

假设 $n=k$ 时，$x_k>0$，

那么 $n=k+1$ 时，若 $x_{k+1}\le 0$，则 $0<x_k=x_{k+1}+\ln(1+x_{k+1})\le 0$，矛盾，故 $x_{k+1}>0$。

因此 $x_n>0(n\in N^*)$

所以 $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})>x_{n+1}$

因此 $0<x_{n+1}<x_n(n\in N^*)$

（Ⅱ）由 $x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})>x_{n+1}$ 得

$$x_nx_{n+1}-4x_{n+1}+2x_n=x_{n+1}^2-2x_{n+1}+(x_{n+1}+2)\ln(1+x_{n+1})$$

记函数 $f(x)=x^2-2x+(x+2)\ln(1+x)(x\geq 0)$

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geq f(0)=0$,

因此 $x_{n+1}^2-2x_{n+1}+(x_{n+1}+2)\ln(1+x_{n+1})=f(x_{n+1})\geq 0$

$$2x_{n+1}-x_n\leq\frac{x_nx_{n+1}}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$$

（III）因为

$$x_n=x_{n+1}+\ln(1+x_{n+1})\leq x_{n+1}+x_{n+1}$$

所以 $x_n\geq\frac{1}{2^{n-1}}$ 得

$$\frac{x_nx_{n+1}}{2}\geq 2x_{n+1}-x_n$$

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{2}\geq 2(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2})\rangle 0$$

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\geq 2(\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{2})\geq\cdots 2^{n-1}(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2})=2^{n-2}$$

故 $x_n\leq\frac{1}{2^{n-2}}$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\leq x_n\leq\frac{1}{2^{n-2}}(n\in\mathbf{N}^*)$$