2020 年全国高中数学联赛福建赛区预赛试题参考答案

1．已知复数 z 满足 $|z-1|=|z-i|$，若 $z-\dfrac{z-6}{z-1}$ 为正实数，则 $z=$__________.

【答案】 $2+2i$

【解答】 由 $|z-1|=|z-i|$ 知，z 的实部与虚部相等，设 $z=x+xi$，$x\in R$.

$$\text{则 } z-\frac{z-6}{z-1}=z-1+\frac{5}{z-1}=x+xi-1+\frac{5}{x+xi-1}=(x-1)+xi+\frac{5\left[(x-1)-xi\right]}{(x-1)^2+x^2},$$

$$=(x-1)+\frac{5(x-1)}{(x-1)^2+x^2}+\left[x-\frac{5x}{(x-1)^2+x^2}\right]i$$

由 $z-\dfrac{z-6}{z-1}$ 为正实数，知 $(x-1)+\dfrac{5(x-1)}{(x-1)^2+x^2}>0$，且 $x-\dfrac{5x}{(x-1)^2+x^2}=0$，解得 $x=2$.

所以，$z=2+2i$.

2．已知 $f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$），若 $f(\frac{5\pi}{8})=0$，$f(\frac{11\pi}{8})=3$，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则 $\varphi=$__________.

【答案】 $-\dfrac{11\pi}{12}$

【解答】 由 $f(\frac{5\pi}{8})=0$，$f(\frac{11\pi}{8})=3$，得 $\frac{5\pi}{8}\omega+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$\frac{11\pi}{8}\omega+\varphi=2m\pi$（$k$，$m\in Z$）.

两式相减，得 $\frac{3\pi}{4}\omega=2m\pi-k\pi-\frac{\pi}{2}$，$\omega=\frac{4}{3}(2m-k-\frac{1}{2})$，$m$，$k\in Z$.

另由 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，得 $\frac{2\pi}{\omega}>2\pi$，$0<\omega<1$．于是，$0<\frac{4}{3}(2m-k-\frac{1}{2})<1$，$\frac{1}{2}<2m-k<\frac{5}{4}$．由 m，$k\in Z$，得 $2m-k=1$.

因此，$\omega=\frac{2}{3}$．将 $\omega=\frac{2}{3}$ 代入 $\frac{11\pi}{8}\omega+\varphi=2m\pi$（$m\in Z$），得 $\varphi=2m\pi-\frac{11\pi}{12}$（$m\in Z$）. 结合 $|\varphi|<\pi$，得 $\varphi=-\frac{11\pi}{12}$.

3．已知$[x]$表示不超过x的最大整数，集合$A=\{x\,|\,x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\,|\,2x^2-3[x]-5=0\}$，则$A\cap B=$________________.

【答案】 $\left\{-1,\dfrac{\sqrt{22}}{2}\right\}$

【解答】 易知$A=(-2,3)$，若$x\in A$，则$[x]=-2,-1,0,1,2$.

当$[x]=-2$时，若$x\in B$，则$2x^2+6-5=0$，x不存在.

当$[x]=-1$时，若$x\in B$，则$2x^2+3-5=0$，$x=\pm1$．$x=1$不符合要求，$x=-1$符合要求.

当$[x]=0$时，若$x\in B$，则$2x^2-0-5=0$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，均不符合要求.

当$[x]=1$时，若$x\in B$，则$2x^2-3-5=0$，$x=\pm2$，均不符合要求.

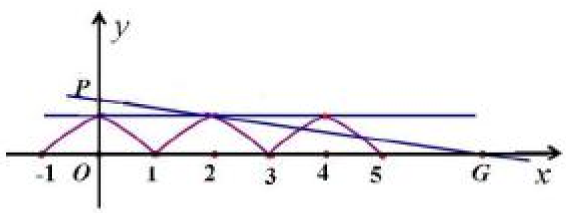
当$[x]=2$时，若$x\in B$，则$2x^2-6-5=0$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{22}}{2}$．$x=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$符合要求，$x=-\dfrac{\sqrt{22}}{2}$不符合要求.

所以，$A\cap B=\left\{-1,\dfrac{\sqrt{22}}{2}\right\}$.

4．已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，且对任意实数x，都有$f(x+1)=f(1-x)$成立，当$1\le x\le 2$时，$f(x)=\ln x$．若关于x的方程$f(x)+ax-1=0$在$x\in[3,5]$上有两个不相等的实数根，则a的取值范围为______________.

【答案】 $\left(0,\dfrac{1}{5}\right]$

【解答】 如图，分别作出函数$y=f(x)$与$y=-ax+1$的图像，其中$P(0,1)$，$G(\dfrac{1}{a},0)$.



（第 4 题答题图）

由图像可知，当$x_G=\dfrac{1}{a}\ge 5$，即$0<a\le\dfrac{1}{5}$时，两函数图像在$x\in[3,5]$上有两个不同的交点.

所以，a的取值范围为$\left(0,\dfrac{1}{5}\right]$.

5．设F_1、F_2为双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，过$F_2$的直线$l$交双曲线$C$的右支于$A$、$B$两点，且$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，$\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{F_2A}=0$，则双曲线$C$的离心率为______．

【答案】$\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

【解答】如图，设$|AF_2|=t$，则依题意有$|BF_2|=2t$，$|AB|=3t$，$|AF_1|=2a+t$，$|BF_1|=2a+2t$．

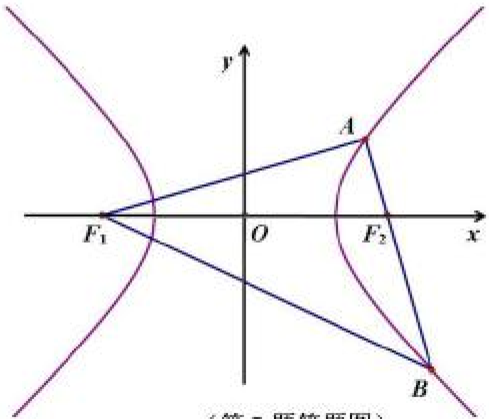
由$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，知$AF_1\perp AF_2$．所以，

$$\begin{cases}|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2\\|AF_1|^2+|AB|^2=|F_1B|^2\end{cases}$$

即$\begin{cases}(2a+t)^2+t^2=(2c)^2\\(2a+t)^2+(3t)^2=(2a+2t)^2\end{cases}$．解得，

$$t=\frac{2}{3}a，\quad c=\frac{\sqrt{17}}{3}a．$$

因此，离心率$e=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$．



（第5题答题图）

6．在以凸十八边形的顶点为顶点构成的三角形中，任取一个三角形，则所取的三角形与该十八边形无公共边的概率为____________．

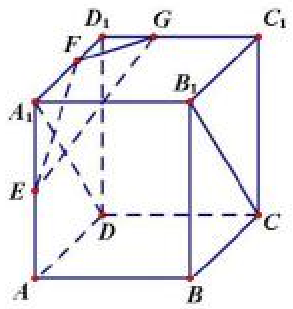
【答案】$\dfrac{91}{136}$

【解答】 以凸十八边形的顶点为顶点的三角形个数为C_{18}^3．

对于凸十八边形的任意一个顶点A，要作为与凸边十八形无公共边的三角形的一个顶点，则三角形的另外两个顶点B、C不能为顶点A在凸十八边形中的两条边的另外两个顶点，只能是其它15个顶点中的不相邻的两个顶点，共有C_{15}^2-14种不同的选取方法．所以，与原凸十八边形无公共边的三角形的个数为$\dfrac{1}{3}\times18\times(C_{15}^2-14)$．

因此，所求的概率为$\dfrac{\frac{1}{3}\times18\times(C_{15}^2-14)}{C_{18}^3}=\dfrac{91}{136}$．

7．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E、F、G分别在棱AA_1、A_1D_1、D_1C_1上，E为AA_1中点，$\frac{D_1F}{D_1A_1}=\frac{D_1G}{D_1C_1}=\frac{1}{3}$．记平面$EFG$与平面$A_1B_1CD$的交线为$m$，则直线$m$与平面$ABCD$所成角的正切值为________．



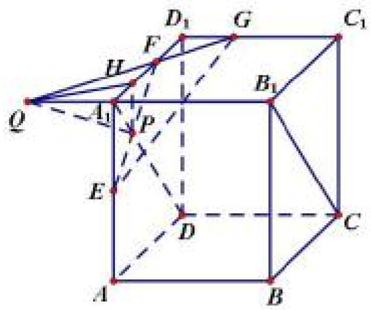
（第7题图）

【答案】$\frac{3\sqrt{58}}{58}$

【解答】如图，设A_1D、EF的交点为P．延长GF、B_1A_1交于点Q，则PQ为平面EFG与平面A_1B_1CD的交线为m．

不妨设正方体棱长为3，则由$\frac{D_1F}{D_1A_1}=\frac{D_1G}{D_1C_1}=\frac{1}{3}$知，$A_1Q=A_1F=2$．

作$PH\perp A_1D_1$于H，则$PH\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，连结QH，则$\angle PQH$就是直线PQ与平面$A_1B_1C_1D_1$所成的角．



（第7题答题图）

设$PH=x$，则$A_1H=x$，由$\frac{PH}{EA_1}=\frac{FH}{FA_1}$，得$\frac{x}{\frac{3}{2}}=\frac{2-x}{2}$，$x=\frac{6}{7}$．

于是，$QH^2=QA_1^2+A_1H^2=2^2+(\frac{6}{7})^2$，$QH=\frac{2\sqrt{58}}{7}$．所以，$\tan\angle PQH=\frac{PH}{QH}=\frac{3\sqrt{58}}{58}$．

由平面$ABCD$//平面$A_1B_1C_1D_1$知，直线PQ与平面$A_1B_1C_1D_1$、平面$ABCD$所成角相等．所以，直线m与平面$ABCD$所成角的正切值为$\frac{3\sqrt{58}}{58}$．

8．已知a、b、c、d为正数，且$a+20b=c+20d=2$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{bcd}$的最小值为______．

【答案】$\frac{441}{2}$

【解答】由条件知，$0<cd=\frac{1}{20}c\cdot 20d\le\frac{1}{20}(\frac{c+20d}{2})^2=\frac{1}{20}$．所以，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{bcd}\ge\frac{1}{a}+\frac{20}{b}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{20}{b})(a+20b)=\frac{1}{2}(401+\frac{20b}{a}+\frac{20a}{b})\ge\frac{1}{2}(401+2\sqrt{\frac{20b}{a}\cdot\frac{20a}{b}})=\frac{441}{2}.$$

当且仅当$c=20d$且$\frac{20b}{a}=\frac{20a}{b}$，即$a=b=\frac{2}{21}$，$c=1$，$d=\frac{1}{20}$时等号成立．

所以，$\frac{1}{a}+\frac{1}{bcd}$的最小值为$\frac{441}{2}$．

9．已知实数 m 满足：当关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge ma^2$ 总成立，则 m 的最大值为________.

【答案】 $\frac{9}{8}$

【解答】 设 $\mu=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}$，其中 a、b、c 为实数，$a\neq 0$.

当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时，设其两根为 x_1、x_2. 由韦达定理知，

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

于是，

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}=(1-\frac{b}{a})^2+(\frac{b}{a}-\frac{c}{a})^2+(\frac{c}{a}-1)^2\\&=(1+x_1+x_2)^2+(-x_1-x_2-x_1x_2)^2+(x_1x_2-1)^2\\&=2(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)\\&\ge 2\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{8}.\end{aligned}$$

当且仅当 $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$，即 $a=b=4c\neq 0$ 时等号成立. 因此 μ 的最小值为 $\frac{9}{8}$. 所以，m 的最大值为 $\frac{9}{8}$.

10．设正整数 n 为合数，$f(n)$ 为 n 的最小的三个正约数之和，$g(n)$ 为 n 的最大的两个正约数之和. 若 $g(n)=f^3(n)$，则 n 的所有可能值为________.

【答案】 144

【解答】 解法一：设正整数 n 满足条件.

显然 n 的最小、最大的正约数分别为1，n. 设 p 是 n 的最小素因子，则 n 的第二小、第二大的正约数分别为 p、$\frac{n}{p}$.

对于 n 的第三小的正约数，有以下两类情形：

(1) 若第三小的正约数为 p^2，则 $p^2\mid n$，$f(n)=1+p+p^2$，$g(n)=n+\frac{n}{p}$.

由 $p^2\mid n$，知 $g(n)=n+\frac{n}{p}$ 为 p 的倍数，$g(n)\equiv 0 \pmod p$.

又 $f(n)=1+p+p^2\equiv 1 \pmod p$，$f^3(n)\equiv 1 \pmod p$. 于是，$g(n)\neq f^3(n)$，与条件不符.

(2) 若第三小的正约数是某一素数 q（$q>p$），则 $f(n)=1+p+q\equiv 1+p \pmod q$，$f^3(n)\equiv(1+p)^3 \pmod q$.

由 $pq|n$，知 $g(n)=n+\frac{n}{p}$ 为 q 的倍数，$g(n)\equiv 0\pmod q$．于是，$(1+p)^3\equiv 0\pmod q$．

由 q 为素数知，$q|1+p$．于是，$p<q\le 1+p$，符合条件的素数 p、q 只有 $p=2$，$q=3$．

又 $p=2$，$q=3$ 时，$f(n)=6$，$g(n)=\frac{3n}{2}$，由 $g(n)=f^3(n)$，得 $\frac{3n}{2}=6^3$，$n=144$．

经验证 $n=144$ 符合要求．所以，n 的所有可能值为 $n=144$．

解法二：若 n 是奇数，则 n 的正约数都是奇数，由 $f(n)$ 与 $g(n)$ 的定义知 $f^3(n)$ 为奇数，$g(n)$ 为偶数，故 n 不满足条件．

因此只需考虑 n 是偶数的情况，此时 1、2 是 n 的最小的两个正约数，n、$\frac{n}{2}$ 是 n 的最大的两个正约数．

设 d 是 n 的第三小的正约数，则 $f(n)=1+2+d=d+3$，$g(n)=n+\frac{n}{2}=3\cdot\frac{n}{2}$，所以，$3\cdot\frac{n}{2}=(d+3)^3$，从而，$d^3 \quad (3 \quad d)^3=3\ \frac{n}{2} \quad 0(\mathrm{mod}\,3)$．

于是，$3|d$，这样 n 的第三小的正约数只能是 3．此时 $f(n)=6$，故 $3\cdot\frac{n}{2}=6^3$，即 $n=144$．因此，n 的所有可能值为 $n=144$．

二、解答题（共 5 小题，每小题 20 分，满分 100 分. 要求写出解题过程）

11．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$（$n\in N^*$）.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=\dfrac{3^n}{a_na_{n+1}}$，$T_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项的和，求证：$T_n<\dfrac{3}{4}$.

【解答】 (1) 由$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$，得$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$．又$a_2-a_1=4\neq 0$，因此，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为等比数列.

所以，$a_{n+1}-a_n=4\times 3^{n-1}$. ………………………… 5 分

所以，$n\geq 2$时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$$=4\times 3^{n-2}+4\times 3^{n-3}+\cdots+4+1=\frac{4(1-3^{n-1})}{1-3}+1=2\times 3^{n-1}-1.$$

又$n=1$时，$2\times 3^{n-1}-1=1=a_1$.

所以，对一切正整数n，$a_n=2\times 3^{n-1}-1$. ………………………… 10 分

(2) 由(1)知，$b_n=\dfrac{3^n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{3^n}{(2\times 3^{n-1}-1)(2\times 3^n-1)}=\dfrac{3}{4}(\dfrac{1}{2\times 3^{n-1}-1}-\dfrac{1}{2\times 3^n-1})$.

………………………… 15 分

所以，

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{3}{4}(\frac{1}{1}-\frac{1}{2\times 3-1})+\frac{3}{4}(\frac{1}{2\times 3-1}-\frac{1}{2\times 3^2-1})+\cdots+\frac{3}{4}(\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}-\frac{1}{2\times 3^n-1})$$

$$=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{2\times 3^n-1})<\frac{3}{4}.$$ ………………………… 20 分

12．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{1}{2}$，右焦点$F$到直线$x-y+2=0$的距离为$2\sqrt{2}$，$A_1$、$A_2$分别为椭圆$C$的左、右顶点．

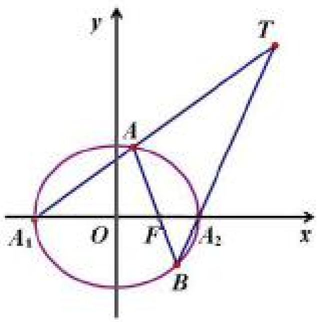
(1) 求椭圆C的方程；

(2) 过点F的直线l交椭圆C于A、B两点（点A在x轴上方），T为直线A_1A、A_2B的交点．当点T的纵坐标为$6\sqrt{3}$时，求直线l的方程．

【解答】 (1) 由右焦点$F(c,0)$到直线$x-y+2=0$的距离为$2\sqrt{2}$，知$\frac{|c-0+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$．

结合$c>0$，得$c=2$．又椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$，因此，$a=2c=4$，$b=2\sqrt{3}$．

所以，椭圆C的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$．　…………… **5 分**



（第 12 题答题图）

(2) **解法一**：如图，易知直线l斜率不为 0，设l方程为$x=my+2$．

由$\begin{cases}x=my+2\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\end{cases}$，得$(3m^2+4)y^2+12my-36=0$．　……… ①

方程①的判别式$\triangle>0$，①有两个不相等的实根．

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\frac{-12m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-36}{3m^2+4}$．

设$T(t,6\sqrt{3})$．由A_1、A、T共线得，$\frac{6\sqrt{3}-0}{t+4}=\frac{y_1-0}{x_1+4}$，即

$$t+4=\frac{6\sqrt{3}(x_1+4)}{y_1}=6\sqrt{3}(m+\frac{6}{y_1}),$$

由A_2、B、T共线得，$\frac{6\sqrt{3}-0}{t-4}=\frac{y_2-0}{x_2-4}$，即

$$t-4=\frac{6\sqrt{3}(x_2-4)}{y_2}=6\sqrt{3}(m-\frac{2}{y_2}).$$

……………………………………………………… **10 分**

于是，

$$(t+4)-3(t-4)=6\sqrt{3}(m+\frac{6}{y_1}-3m+\frac{6}{y_2})=6\sqrt{3}(-2m+6\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2})=6\sqrt{3}(-2m+6\cdot\frac{-12m}{-36})=0$$

由此可得，$t=8$．　……………………………………………… **15 分**

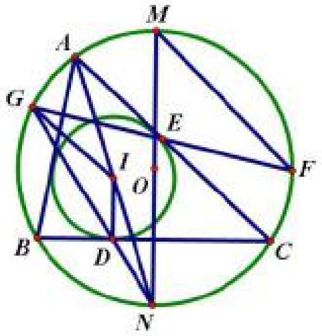
所以，$T(8,6\sqrt{3})$，直线A_1T方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+4)$，与椭圆$C$的方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$联立得$A(0,2\sqrt{3})$．

所以，直线AF方程即直线l方程为$y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$，即$\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$．　……… **20 分**

13．如图，在$\triangle ABC$中，$AB<AC$，$\triangle ABC$的内切圆I与边BC、CA分别切于点D、E，连AI并延长交$\triangle ABC$的外接圆O于点N，连ND、NO并延长分别交$\odot O$于点G、M，连GE并延长交$\odot O$于点F．

(1) 求证：$\triangle NIG \backsim \triangle NDI$；

(2) 求证：$MF // AC$．



（第13题图）

【证明】 (1) 如图，连结BN，BI，BG．由I为$\triangle ABC$的内心知，

$\angle NBI=\angle NBC+\angle CBI=\angle NAC+\angle CBI=\angle BAI+\angle ABI=\angle BIN$．

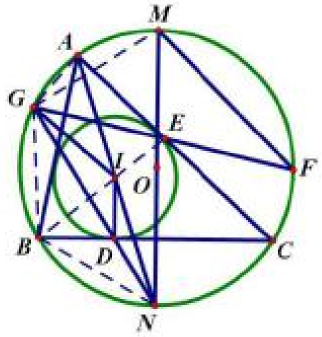
所以，$NB=NI$．…………………………………… 5分

又$\angle NGB=\angle NAB=\angle NAC=\angle NBD$，$\angle BNG=\angle DNB$，所以，

$\triangle NBG \backsim \triangle NDB$，$\dfrac{NB}{NG}=\dfrac{ND}{NB}$．

因此，$\dfrac{NI}{NG}=\dfrac{ND}{NI}$．又$\angle ING=\angle DNI$，

所以，$\triangle NIG \backsim \triangle NDI$．………………………… 10分



（第13题答题图）

(2) 连结GA、GM．由（1）$\triangle NIG \backsim \triangle NDI$，得$\angle NGI=\angle NID$．

由I为$\triangle ABC$的内心，知N为$\overset{\frown}{BC}$的中点，$MN\perp BC$．

又$ID\perp BC$，因此$ID // MN$，$\angle NID=\angle ANM=\angle AGM$．

所以，$\angle NGI=\angle AGM$．

于是，$\angle AGI=\angle AGM+\angle MGI=\angle NGI+\angle MGI=\angle MGN=90^\circ$，………………… 15分

又$\angle AEI=90^\circ$．

所以，A、G、I、E四点共圆．

所以，$\angle AEG=\angle AIG=90^\circ-\angle GAI=90^\circ-\angle GAN=90^\circ-\angle GMN=\angle MNG=\angle MFG$．

所以，$MF // AC$．…………………………………………… 20分

14．已知 $f(x)=\left[x^2+(a-1)x+1\right]e^x$，若 $f(x)+e^2\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解答】 $f'(x)=(2x+a-1)e^x+\left[x^2+(a-1)x+1\right]e^x=(x+1)(x+a)e^x$．

设 $g(x)=x^2+(a-1)x+1$．

① 当 $-1\leq a\leq 3$ 时，方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 的判别式 $\triangle=(a-1)^2-4\leq 0$，

此时 $g(x)\geq 0$ 恒成立，$f(x)+e^2=g(x)\cdot e^x+e^2\geq e^2>0$ 恒成立.

…………………………………………………… **5 分**

② 当 $a>3$ 时，$x<-a$ 或 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$；$-a<x<-1$ 时，$f'(x)<0$．

$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-a]$，$[-1,+\infty)$ 上为增函数；在 $[-a,-1]$ 上为减函数.

当 $x\leq -a$ 时，$g(x)=x^2+(a-1)x+1=x(x+a)+1-x>0$，$f(x)+e^2>0$ 成立.

当 $x>-a$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=(3-a)e^{-1}$．

由 $f(x)+e^2\geq 0$ 恒成立知，$(3-a)e^{-1}+e^2\geq 0$，$a\leq e^3+3$．

因此，$3<a\leq e^3+3$． ………………………………………… **10 分**

③ 当 $a<-1$ 时，$x<-1$ 或 $x>-a$ 时，$f'(x)>0$；$-1<x<-a$ 时，$f'(x)<0$．

$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1]$，$[-a,+\infty)$ 上为增函数；在 $[-1,-a]$ 上为减函数.

当 $x\leq -1$ 时，$g(x)=x^2+(a-1)x+1>(a-1)x>0$，$f(x)+e^2>0$ 成立.

当 $x>-1$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(-a)$．

由 $f(x)+e^2\geq 0$ 恒成立知，$f(-a)+e^2=(a+1)e^{-a}+e^2\geq 0$． ………………… **15 分**

设 $h(x)=(x+1)e^{-x}+e^2$，则 $h'(x)=-xe^{-x}$，$x<-1$ 时，$h'(x)>0$．

所以，$h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上为增函数.

又 $h(-2)=0$，于是 $h(x)\geq 0$ 在 $(-\infty,-1)$ 上的解集为 $[-2,-1)$．

因此，$a<-1$ 时，$f(-a)+e^2=(a+1)e^{-a}+e^2\geq 0$，的解集为 $[-2,-1)$．

综合①、②、③得 $-2\leq a\leq e^3+3$．

所以，a 的取值范围为 $\left[-2,e^3+3\right]$． ………………………………………… **20 分**

15．将一个 2020×2020 方格表的每个小方格染黑、白两种颜色之一，满足以下条件：方格表中的任意一个小方格 A，它所在的行与列的所有小方格中，与 A 异色的小方格多于与 A 同色的小方格．证明：染色后，方格表中每行、每列两种颜色的小方格一样多．

【证明】 对黑格与白格分别标记 -1 和 1．

对任意 i、j（$1\le i$、$j\le2020$），设第 i 行各数之和为 s_i，第 j 列各数之和为 t_j，第 i 行与第 j 列交叉格中的数为 a_{ij}，则位于第 i 行或第 j 列上的全部数之和为 $s_i+t_j-a_{ij}$．

由条件知，$s_i+t_j-a_{ij}$ 与 a_{ij} 异号．………………………………… **5 分**

所以，$a_{ij}(s_i+t_j-a_{ij})\le-1$．

又 $a_{ij}^2=1$，因此 $a_{ij}(s_i+t_j)\le0$，$\sum\limits_{i=1}^{2020}\sum\limits_{j=1}^{2020}a_{ij}(s_i+t_j)\le0$．…………………… **10 分**

另一方面，$\sum\limits_{i=1}^{2020}\sum\limits_{j=1}^{2020}a_{ij}(s_i+t_j)=\sum\limits_{i=1}^{2020}s_i\sum\limits_{j=1}^{2020}a_{ij}+\sum\limits_{j=1}^{2020}t_j\sum\limits_{i=1}^{2020}a_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{2020}s_i^2+\sum\limits_{j=1}^{2020}t_j^2\ge0$．……… **15 分**

所以，$\sum\limits_{i=1}^{2020}\sum\limits_{j=1}^{2020}a_{ij}(s_i+t_j)=\sum\limits_{i=1}^{2020}s_i^2+\sum\limits_{j=1}^{2020}t_j^2=0$．

因此，对任意的 i、j，均有 $s_i=0$，$t_j=0$．

所以，每行、每列中的两种颜色的小方格一样多．………………………………… **20 分**

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”,即可获取《高考考前必背知识点》