

高三阶段性考试 数学(文科)

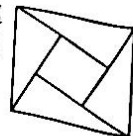
考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | 2 - x < 1\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | 1 < x < 3\}$ B. $\{x | x < 1\}$ C. $\{x | x < 3\}$ D. $\emptyset$
2. 若复数 z 满足 $\frac{z}{2-i} = 2i$, 则 $|z+1| =$
A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{17}$ C. 5 D. 17
3. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2^x - 1, & x \geq 0 \\ \log_2 |x| + 1, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(f(1)) =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线的斜率为 2, 焦距为 $2\sqrt{5}$, 则 $a =$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5. 已知向量 $|a| = 2$, $|b| = 1$, 且 $|a - 3b| = \sqrt{7}$, 则向量 a, b 的夹角是
A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$
6. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AA_1 = 2AB$, D, E, F 分别是棱 B_1C_1, CC_1, AA_1 的中点, 则异面直线 BE 与 DF 所成角的余弦值是
A. $\frac{\sqrt{14}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{35}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$
7. 某校举行校园歌手大赛, 5 名参赛选手的得分分别是 9, 8, 7, 9, 3, x, y . 已知这 5 名参赛选手的得分的平均数为 9, 方差为 0.1, 则 $|x - y| =$
A. 0.5 B. 0.6 C. 0.7 D. 0.8
8. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x)$ 在其定义域内存在 x_0 , 使得 $f(x_0) = f'(x_0)$, 则称 $f(x)$ 为“有源”函数. 已知 $f(x) = \ln x - 2x - a$ 是“有源”函数, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, -1]$ B. $(-1, +\infty)$
C. $(-\infty, -\ln 2 - 1]$ D. $(-\ln 2 - 1, +\infty)$
9. 如图, 这是第 24 届国际数学家大会会标的大致图案, 它是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的. 现用红色和蓝色给这 4 个三角形区域涂色, 每个区域只涂一种颜色, 则相邻的区域所涂颜色不同的概率是
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$



10. 已知函数 $f(x) = -2\cos(2x + \frac{\pi}{3})\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期是 π
 B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增
 C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, 0) (k \in \mathbb{Z})$ 对称
 D. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ 上的值域是 $[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

11. 已知球 O 的半径为 2, 圆锥内接于球 O , 当圆锥的体积最大时, 圆锥内切球的半径为

- A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $\frac{4(\sqrt{3}-1)}{3}$ D. $\frac{4(\sqrt{3}+1)}{3}$

12. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b\cos A - a\cos B = a$, 则 $\sqrt{3}\sin B + 2\sin^2 A$ 的取值范围是

- A. $(0, \sqrt{3}+1)$ B. $(2, \sqrt{3}+1)$ C. $(1, 3]$ D. $(2, 3]$

第 II 卷

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y-3 \leq 0, \\ x \geq 2, \\ y \leq 3, \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

14. 已知 α 是第二象限角, 且 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) = \underline{\hspace{1cm}}$.

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-4, 4]$ 上的减函数, 且 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称, 则关于 x 的不等式 $f(2x) + f(x-3) + 3x-5 > 0$ 的解集为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 过点 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 且直线 l_1, l_2 分别与抛物线 C 交于 A, B 和 D, E , 则四边形 $ADBE$ 面积的最小值是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

国际足联世界杯(FIFA World Cup), 简称“世界杯”, 是由全世界国家级别球队参与, 象征足球界最高荣誉, 并具有最大知名度和影响力的足球赛事. 2022 年卡塔尔世界杯共有 32 支球队参加比赛, 共有 64 场比赛. 某社区随机调查了街道内男、女球迷各 200 名, 统计了他们观看世界杯球赛直播的场次, 得到下面的列联表:

	少于 32 场比赛	不少于 32 场比赛	总计
男球迷	$a+20$	$a+20$	
女球迷	$a+40$	a	
总计			

(1) 求 a 的值, 并完成上述列联表;

(2) 若一名球迷观看世界杯球赛直播的场次不少于 32 场比赛, 则称该球迷为“资深球迷”, 请判断能否有 95% 的把握认为该社区的一名球迷是否为“资深球迷”与性别有关.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

18. (12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $4S_n = a_n^2 + 2a_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

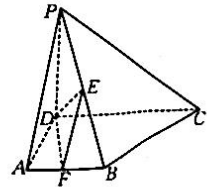
(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n(a_n+2)}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{4}$.

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AD \perp AB$, $AB \parallel CD$, $PB = CD = 2AB = 2AD$, $PD = \sqrt{2}AB$, $PC \perp DE$, E 是棱 PB 的中点.

(1) 证明: $PD \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 若 F 是棱 AB 的中点, $AB = 2$, 求点 C 到平面 DEF 的距离.



20. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 斜率为 k 的直线 l 过 E 的左焦点, 且直线 l 与椭圆 E 相交于 A, B 两点.

(1) 若 $k = 1$, $|AB| = \frac{8}{3}$, 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 若 $\frac{|AF_2|}{|AF_1|} = 5$, $\frac{|BF_2|}{|BF_1|} = \frac{1}{2}$, $k < 0$, 求 k 的值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax + e^2 - 7$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程;

(2) 若对任意的 $x \geq 0$, $f(x) \geq \frac{7}{4}x^2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生从第 22, 23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+3\cos\alpha, \\ y=3\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程是 $2\rho\cos\theta - \rho\sin\theta - 1 = 0$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 点 $P(0, -1)$, 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x-2| + |x+3|$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若 $x \in [-3, 2]$, 不等式 $f(x) \geq |x+a|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.