2021届高中毕业班考前热身联合考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。微信搜《高三试卷答案公众号》
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|\sqrt{x+3}>2\}$，$B=\{y|y=x^2+2\}$，则

A. $\complement_U A\subseteq\complement_U B$　　B. $A\subseteq\complement_U B$　　C. $A\cup B=U$　　D. $(\complement_U A)\cup B=U$

2. 若在复平面内，复数 $4-3\mathrm{i}$，$-1-3\mathrm{i}$，$3+\mathrm{i}$ 所对应的点分别为 A,B,C，则 $\triangle ABC$ 的面积为

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

3. 国家统计局2021年1月的统计数据显示，我国2010—2019年未成年人犯罪人数所占比重如图所示，则下列说法不一定正确的是

A. 我国2010—2018年未成年人犯罪比重持续下降

B. 与2010年相比，2019年未成年人犯罪比重下降4.19个百分点

C. 2019年我国未成年人犯罪的人数多于2018年我国未成年人犯罪的人数

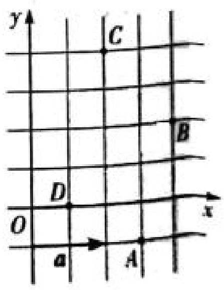
D. 2010—2019年我国未成年人犯罪人数所占比重的中位数为3.91%

4. 已知声音强弱的等级 $f(x)$（单位：dB）由声音强度 x（单位：$\mathrm{W/m^2}$）决定. 科学研究发现，$f(x)$ 与 $\lg x$ 成线性关系，如喷气式飞机起飞时，声音强度为100 $\mathrm{W/m^2}$，声音强弱的等级为140 dB；某动物发出的鸣叫，声音强度为1 $\mathrm{W/m^2}$，声音强弱的等级为120 dB. 若某声音强弱的等级为90 dB，则声音强度为（　　）$\mathrm{W/m^2}$.

A. 0.001　　B. 0.01

C. 0.1　　D. 1

5. 如图所示网格纸中小正方形的边长均为1，向量 $\boldsymbol{a}$ 如图所示，若从 A,B,C,D 中任选两个点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的始点与终点，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值为



A. 8　　B. 6

C. 4　　D. 2

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

6. 对于 $n\in\mathbf{N}^*$，有如下4个数列：①$a_n=\sin n\pi$；②$a_n=3n-4$；③$a_n=\begin{cases}2^n, n\text{ 为奇数},\\5^n, n\text{ 为偶数};\end{cases}$④$a_n=n+(-1)^n\cdot\frac{2}{n}$. 其中满足条件 $a_{2n-1}<a_{2n+1}$，$a_{2n}<a_{2n+2}$，$a_{2n-1}<a_{2n}$的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 若不等式 $2^{x+1}-2<ax$ 的解集中有且仅有两个正整数，则实数 a 的取值范围是

A. $\left[3,\frac{14}{3}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{14}{3}\right)$　　C. $\left(2,\frac{14}{3}\right]$　　D. $\left(3,\frac{14}{3}\right]$

8. 函数 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2}{3}$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$上的所有零点之和为

A. $\frac{5\pi}{3}$　　B. $\frac{10\pi}{3}$　　C. 5π　　D. $\frac{20\pi}{3}$

9. 若两个相同的正四面体关于其中的一个正四面体的中心对称，且一个正四面体的表面积为 $24\sqrt{3}$，记这两个正四面体形成的公共区域为 Ω，则 Ω 的体积为

A. $8\sqrt{3}$　　B. $6\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，不过原点且斜率为2的直线 l 与抛物线 C 交于 M,N 两点，若$\angle MFN=90°$，则$|MF|\cdot|NF|=$

A. 60　　B. 50　　C. 40　　D. 25

11. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=\frac{BB_1}{2}$，点 E 在线段 CC_1 上，$\frac{CE}{CC_1}=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，平面 α 过线段 AA_1 的中点以及点 B_1,E，现有如下说法：

①$\exists\lambda\in[0,1]$，使得 $BE\perp B_1E$；

②若 $\lambda\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$，则平面 α 截长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面为平行四边形；

③若 $\lambda=0$，$AB=2$，则平面 α 截长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面的面积为 $3\sqrt{6}$.

上述说法正确的个数为 微信搜《高三试卷答案公众号》

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

12. 已知$\forall x_1\in(0,+\infty)$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$，使得$(x_1+1)^{\frac{1}{2}}-\ln\left(\frac{x_1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}-3=x_2^4+ax_2^3+bx_2^2+ax_2$，若 $a^2+b^2\geqslant\lambda$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为

A. $\left(-\infty,\frac{4}{5}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{2}{5}\right]$　　C. $(-\infty,0]$　　D. $(-\infty,1]$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若 x,y 满足约束条件$\begin{cases}x\leqslant y+1,\\x+2y\leqslant 4,\\x+y\geqslant 0,\end{cases}$则 $z=3x+2y$ 的最小值为________.

14. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若$4a_2,a_5,6$成等差数列，且 $a_2,\sqrt{S_9},a_{14}$成等比数列，则 $S_n=$________.

15. 厦门国际马拉松赛是与北京国际马拉松赛齐名的中国著名赛事品牌，两者“一南一北”，形成春秋交替之势. 为了备战2021年厦门马拉松赛，厦门市某“跑协”决定从9名协会会员中随机挑选3人参赛，则事件“其中 A,B,C,D 这4人中至少1人参加，且 A 与 B 不同时参加，C 与 D 不同时参加”发生的概率为________.

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

16. 已知双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个顶点恰为圆 $C_2:(x-\sqrt{5})^2+y^2=b^2$ 的圆心，且双曲线 C_1 的一条渐近线与圆 C_2 交于 A,B 两点，若点 B 恰为线段 OA（点 O 为坐标原点）上靠近 A 的三等分点，则双曲线 C_1 的离心率为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，BC 边上的高为 $\frac{1}{2}a$.

（Ⅰ）若 $\tan A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，求 $\sin B\sin C$ 的值；

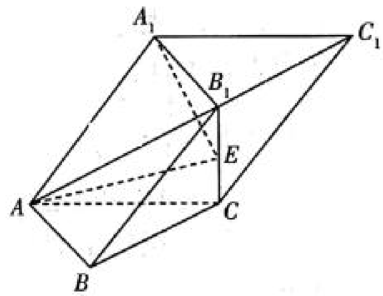
（Ⅱ）求 $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$ 的最值.

18.（12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=\frac{\sqrt{3}}{3}BB_1$，$\angle BAC=90°$，点 B_1 在平面 ABC 内的投影与点 C 重合，点 E 为线段 B_1C 的中点.

（Ⅰ）求证：平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1A_1；

（Ⅱ）求二面角 $E-AA_1-C$ 的余弦值.



19.（12 分）

动车和 BRT（快速公交）的出现，方便了人们的出行，并且带动了我国经济的巨大发展，根据统计，在 2020 年从甲市到乙市乘坐动车和 BRT 的人数众多，为了调查乘客对这两种出行方式的满意度，研究人员随机抽取了 500 名乘客进行调查，所得情况统计如下表所示：

满意程度	30 岁以下		30～50 岁		50 岁及 50 岁以上	
	乘坐动车	乘坐 BRT	乘坐动车	乘坐 BRT	乘坐动车	乘坐 BRT
满意	50	5	100	10	100	20
一般	20	15	40	20	20	25
不满意	5	0	20	10	20	20

（Ⅰ）若从样本中任取 1 人，求抽取的乘客年龄在 30 岁及 30 岁以上的概率；

（Ⅱ）记满意为 10 分，一般为 5 分，不满意为 0 分，根据表中数据，计算样本中 30～50 岁乘坐动车乘客满意程度的平均分以及方差；

（Ⅲ）以样本中这 500 名乘客属于每个年龄层的频率代替 1 名乘客属于该年龄层的概率，若从所有乘客中随机抽取 4 人，记年龄在 30～50 岁的乘客人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，四个顶点围成的四边形的面积为 4，过右焦点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点，且 $A(x_0,y_0)$ 满足 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AN}$.

（Ⅰ）证明：$x_0>0$；

（Ⅱ）过点 A 且与 l 垂直的直线 l' 过点 $P(x_P,0)$，$Q(0,y_Q)$，若 $\triangle OPQ$（点 O 为坐标原点）的面积与 $\triangle PAF$ 的面积相等，求直线 l 的方程.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=m^2x^2e^{x-1}-(x+1)\ln x, m>0$.

（Ⅰ）若 $m=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant mx$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

（参考数据：$\ln 2\approx 0.69$）

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=m-6t,\\ y=4t\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sqrt{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}=2$，其中 $\theta\in[0,\pi]$.

（Ⅰ）写出直线 l 的极坐标方程以及曲线 C 的参数方程；

（Ⅱ）已知点 P,Q 分别在曲线 C 以及直线 l 上，且 $|PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$，求 m 的值.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x+4|+|x-3|$.

（Ⅰ）求不等式 $f(x)>6$ 的解集；

（Ⅱ）已知函数 $g(x)=f(x)-|x+2|$ 的最小值为 A，若正数 m,n 满足 $3m+4n=A$，求 $\frac{1}{3m+1}+\frac{1}{2n+1}$ 的最小值.

2021.5.29

2021 届高中毕业班考前定位联合考试

理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. **答案** C 微信搜《高三试卷答案公众号》

命题意图 本题考查集合的交集.

解析 由$\begin{cases}|y|=x^2,\\x^2+y^2=2\end{cases}$可得$\begin{cases}x=-1,\\y=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$故 $A\cap B$ 中含有 4 个元素.

2. **答案** B

命题意图 本题考查空间中直线的位置关系.

解析 画图可知,$MN/\!/CD_1$,$CD_1/\!/BA_1$,$\therefore MN/\!/BA_1$. $\because MN/\!/CD_1$,$CD_1\perp$平面 AB_1C_1D,$\therefore MN\perp$平面 AB_1C_1D,$\therefore MN\perp DB_1$,$MN\perp AC_1$. $\therefore$满足条件的直线有 2 条.

3. **答案** A

命题意图 本题考查正弦定理的应用.

解析 因为 $4a\sin B=\sqrt{3}b\cos A+b\sin A$,所以由正弦定理可得 $4\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A+\sin B\sin A$,因为 B 为三角形内角,所以 $\sin B\neq 0$,所以 $4\sin A=\sqrt{3}\cos A+\sin A$,即 $3\sin A=\sqrt{3}\cos A$,可得 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$,因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

4. **答案** A

命题意图 本题考查复数的运算及充要条件.

解析 $\because z=\frac{1+2i}{1+i}=\frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+2i+2}{1+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$,$\therefore\left|\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+bi\right|=\left|\frac{3}{2}+\left(b+\frac{1}{2}\right)i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}$,$\therefore -1\leqslant b\leqslant 0$. 分析选项可知只有 A 正确.

5. **答案** D

命题意图 本题考查平均数及中位数.

解析 4 人的平均年收入为 25 万,中位数为 20 万,则中位数对平均数的占比为$\frac{20}{25}=0.8$,由表可知对应的基尼系数为 0.363.

6. **答案** B

命题意图 本题考查函数模型的应用.

解析 2021 年的自投资金为 $5\ 000\times1.1^5\approx5\ 000\times1.6=8\ 000$,2021 年的扶贫资金为 $30\ 000-5\times5\ 000=5\ 000$,所以该贫困户 2021 年的年总收入约为 $1\ 200+4.1\times5\ 000+4.3\times8\ 000+900\times2=57\ 900$(元).

7. **答案** C

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 由题可知 $y'=x^2-2x$,则曲线在点 $x=a$ 处的切线的斜率 $k=y'|_{x=a}=a^2-2a$. 由题可知 $a^2-2a=1-b\Rightarrow b=-a^2+2a+1=-(a-1)^2+2$,当 $a=1$ 时,b 的最大值为 2.

高三试卷答案

官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

8. **答案** D

命题意图 本题考查抛物线的定义及直线与抛物线的位置关系.

解析 由题意,得 $F(1,0)$. 又因为 $k=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故直线 AB 的方程为 $x=\sqrt{3}y+1$,与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立,得 $y^2-4\sqrt{3}y-4=0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4\sqrt{3}$,$x_1+x_2=\sqrt{3}(y_1+y_2)+2=14$,所以 $Q(7,2\sqrt{3})$. 过 P 作 PH 垂直于准线于点 H,根据抛物线的定义,得 $|PF|+|PQ|=|PH|+|PQ|\geqslant|QH|\geqslant 7+1=8$.

9. **答案** C

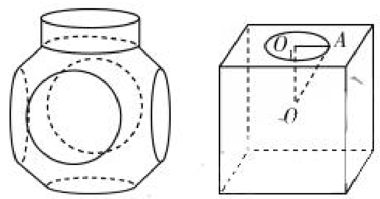
命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由题意可得 $g(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$,$g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8},m\right]$ 上的值域为 $[-1,3]$ 时,$0\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,当 $x\in\left[-\frac{\pi}{8},m\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[0,2m+\frac{\pi}{4}\right]$. 而当 $x\in[0,\pi]$ 时,$y=\sin x\in[0,1]$,$\therefore \frac{\pi}{2}\leqslant 2m+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi$,$\therefore \frac{\pi}{8}\leqslant m\leqslant\frac{3\pi}{8}$.

10. **答案** A

命题意图 本题考查几何体的三视图及体积的计算.

解析 由三视图可知该储糖罐的形状如图(1)所示. 设截面圆半径为 r,球的半径为 R,由题可知球心到某一截面的距离为正方体棱长的一半,即为 4,$r=3$,故 $R^2=3^2+4^2=25$,得 $R=5$,所以球的体积 $V_1=\frac{4}{3}\pi\times 5^3=\frac{500}{3}\pi$. 如图(2),$OA=R=5$,且 $OO_1=4$,则球缺的高 $h=R-OO_1=1$,一个球缺的体积 $V_2=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)=\frac{14}{3}\pi$,上面圆柱的体积为 $V_3=\pi\times 3^2\times 1=9\pi$,所以该储糖罐的体积 $V=V_1-6V_2+V_3=\frac{443}{3}\pi$.



图(1)　　图(2)

11. **答案** A

命题意图 本题考查双曲线的性质及圆的标准方程.

解析 由 $y=\frac{2x+2}{x-1}=2+\frac{4}{x-1}$ 可知此双曲线是由双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 平移得来的,对称中心为 $(1,2)$,双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 绕原点顺时针转动 45°,就会得到双曲线 $x^2-y^2=8$,所以焦距为 8,所以所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$.

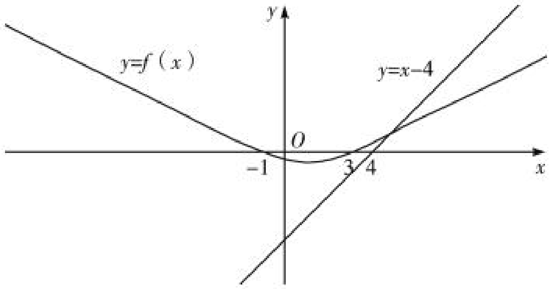
12. **答案** C

命题意图 本题考查导数在函数零点问题中的应用.

解析 由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2e^{x-1}-e^{x-1}-1}{2(e^{x-1}+1)}=\frac{e^{x-1}-1}{2(e^{x-1}+1)}$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增;当 $x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减. 令 $f(x)=0$,可得 $x=3$ 或 -1. 因为函数 $g(x)$ 恰有 2 个零点,结合图象(如图),可知 $-1<\lambda\leqslant 3$ 或 $\lambda>4$.

高三试卷答案

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018



二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** -6

命题意图 本题考查向量的数量积.

解析 由题意,$A(0,0)$,$B(4,1)$,$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-4)^2+(t-1)^2}=2\sqrt{2}$,$\therefore t=3$,$C(2,3)$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(4,1)\cdot(-2,2)=-6$.

14. **答案** -14

命题意图 本题考查二项式定理.

解析 因为$\left(x-\frac{1}{x}\right)(1-x)^7=x(1-x)^7-\frac{1}{x}(1-x)^7$,所以 x^3 的系数为 $C_7^2(-1)^2-C_7^4(-1)^4=-14$.

15. **答案** $\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$

命题意图 本题考查同角三角函数关系.

解析 $\sqrt{1-2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}+\sqrt{1+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}-2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2}}+\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\left(\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\cos\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$

$=2\cos\frac{1}{2}=a$,则 $\cos\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$,而 $1+\tan^2\frac{1}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}}$,$\therefore \tan^2\frac{1}{2}=\frac{4}{a^2}-1$,

又 $\tan\frac{1}{2}>0$,$\therefore \tan\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{4}{a^2}-1}=\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$.

16. **答案** ②③

命题意图 本题考查数学文化.

解析 曲线 D:$|x|+|y|=a$ 的周长为 $4\sqrt{2}a<6a$,所以①错误;曲线 C 上左右两端点$(-a,0)$,$(a,0)$或上下两端点$(0,a)$,$(0,-a)$的距离最远,等于 $2a$,②正确;曲线 C 上一点到原点的最短距离为$\frac{1}{2}a$,此类点共有 4 个,故曲线 C 与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$有且仅有 4 个公共点,③正确;不妨设点 $P(x,y)$为第一象限上的点,则 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\geqslant 2\sqrt{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}=2x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}$,$\therefore xy\leqslant\frac{a^2}{8}$,④错误.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等比数列的通项公式及错位相减法.

解析 (Ⅰ)由$\begin{cases}6a_1=a_2+a_3,\\a_2=4,\end{cases}$ ……………………………………………………………… (2 分)

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

解得 $a_1=q=2$,所以 $a_n=2^n$. …………（3分）

当 $n\geq 2$ 时,$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n$, …………（5分）

又 $b_1=S_1=1$ 也符合上式,所以 $b_n=n$. …………（6分）

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $a_nb_n=n\cdot 2^n$.

设 $T=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$,

则 $2T=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$, …………（7分）

两式相减得 $-T=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$.

$\therefore T=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$. …………（9分）

$\because (n+m)a_{n+1}=n\cdot 2^{n+1}+m\cdot 2^{n+1}\geq(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$,

即 $m\geq -1+\frac{1}{2^n}$对任意正整数 n 恒成立. …………（10分）

当 $n=1$ 时,$-1+\frac{1}{2^n}$取最大值 $-\frac{1}{2}$.

$\therefore m\geq -\frac{1}{2}$.

$\therefore m$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$. …………（12分）

18. **命题意图** 本题考查空间线面位置关系及利用空间向量求二面角的余弦值.

解析 (Ⅰ)如图,过 E 点作 $EF/\!/A_1A$ 交 A_1C 于点 F,连接 DF.

$\because BB_1/\!/A_1A$,$\therefore EF/\!/BB_1$,$\therefore EF$ 与 BB_1 确定一个平面. …………（2分）

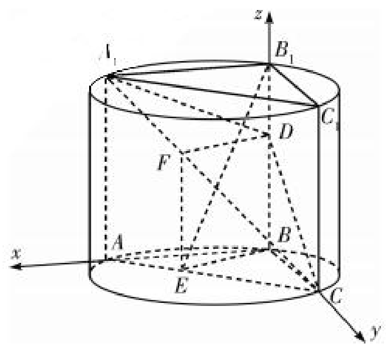
$\because BE/\!/$平面 A_1CD,平面 $A_1CD\cap$平面 $DBEF=DF$,$\therefore BE/\!/DF$.

$\therefore$ 四边形 $DBEF$ 为平行四边形,$\therefore DB=EF$. …………（4分）

又$\frac{AC}{AE}=3$,$\therefore \frac{EF}{A_1A}=\frac{CE}{AC}=\frac{2}{3}$,

$\therefore \frac{BD}{B_1B}=\frac{EF}{A_1A}=\frac{2}{3}$,$\frac{B_1D}{BB_1}=\frac{1}{3}$. …………（6分）

(Ⅱ)由题意知 BA,BC,BB_1 两两垂直,所以以 B 为原点建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $BA=BC=BB_1=2$,则 $B(0,0,0)$,$B_1(0,0,2)$,$C(0,2,0)$,$D\left(0,0,\frac{4}{3}\right)$,$A_1(2,0,2)$,$E\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)$.

$\therefore \overrightarrow{B_1E}=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-2\right)$,$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)$,$\overrightarrow{CD}=\left(0,-2,\frac{4}{3}\right)$,$\overrightarrow{A_1C}=(-2,2,-2)$. …………（7分）

设平面 A_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1C}\cdot \boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot \boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x_1+2y_1-2z_1=0,\\ -2y_1+\dfrac{4}{3}z_1=0,\end{cases}$令 $z_1=3$,得 $\boldsymbol{m}=(-1,2,3)$. ………………………… (8 分)

设平面 B_1BE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{B_1E}\cdot \boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot \boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{4}{3}x_2+\dfrac{2}{3}y_2-2z_2=0,\\ \dfrac{4}{3}x_2+\dfrac{2}{3}y_2=0,\end{cases}$令 $x_2=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-2,0)$. ………………………… (10 分)

设平面 B_1BE 与平面 A_1CD 所成锐二面角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{70}}{14}$,

∴ 平面 B_1BE 与平面 A_1CD 所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{70}}{14}$. ………………………… (12 分)

19. **命题意图**　本题考查概率的计算.

解析　(Ⅰ)该服装店前 3 年卖的品牌有 4 种情况:

“甲、甲、甲”的概率为$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$,利润为 $7+7.5+8=22.5$ 万元;

“甲、甲、乙”的概率为$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$,利润为 $7+7.5+11=25.5$ 万元;

“甲、乙、甲”的概率为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$,利润为 $7+10.5+8=25.5$ 万元;

“甲、乙、乙”的概率为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$,利润为 $7+10.5+11=28.5$ 万元. ………………………… (4 分)

所以前 3 年的利润之和超过 25 万元的概率为$\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{9}$. ………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知该服装店第三年卖甲品牌的概率为$\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{19}{36}$,卖乙品牌的概率为$\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{36}$,所以第四年卖甲品牌的概率为$\dfrac{19}{36}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{17}{36}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{203}{432}$. ………………………… (8 分)

从而第四年卖乙品牌的概率为 $1-\dfrac{203}{432}=\dfrac{229}{432}$. ………………………… (9 分)

又第四年卖甲品牌的利润为 8.5 万元,卖乙品牌的利润为 11.5 万元, ………………………… (10 分)

因此第四年的利润的数学期望为 $8.5\times\dfrac{203}{432}+11.5\times\dfrac{229}{432}=\dfrac{1\,453}{144}$. ………………………… (12 分)

20. **命题意图**　本题考查椭圆的方程及直线与椭圆的位置关系.

解析　(Ⅰ)根据题意,$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ………………………… (1 分)

又$\dfrac{1}{2}\cdot 2b\cdot 2c=2$. ………………………… (2 分)

解得 $a=\sqrt{2}$,$b=1$, ………………………… (3 分)

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………… (4 分)

(Ⅱ)存在点 $P\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$或 $P\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$满足条件,理由如下:

由题意,$\sqrt{|MP|^2+|NP|^2}=\sqrt{3}|MP|\cdot|NP|\Leftrightarrow\dfrac{1}{|MP|^2}+\dfrac{1}{|NP|^2}=3$.

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

设点 P 的坐标为 $(m,0)(-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2})$.

当直线 MN 的斜率为零时，点 M,N 为椭圆长轴的端点，

则 $\dfrac{1}{|MP|^2}+\dfrac{1}{|NP|^2}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}-m)^2}+\dfrac{1}{(\sqrt{2}+m)^2}=\dfrac{(\sqrt{2}+m)^2+(\sqrt{2}-m)^2}{(2-m^2)^2}=3$,

解得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=\pm2$(舍去). ……………………………………………………………… (6 分)

当直线 MN 的斜率不为 0 时，设直线 MN 的方程为 $x=ty+m$，设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=ty+m,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+2)y^2+2tmy+m^2-2=0$.

由根与系数的关系得 $y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{t^2+2}$, $y_1y_2=\dfrac{m^2-2}{t^2+2}$. ……………………………………… (7 分)

因此，$\dfrac{1}{|MP|^2}+\dfrac{1}{|NP|^2}=\dfrac{1}{(1+t^2)y_1^2}+\dfrac{1}{(1+t^2)y_2^2}=\dfrac{y_1^2+y_2^2}{(1+t^2)y_1^2y_2^2}=\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{(1+t^2)y_1^2y_2^2}=\dfrac{\dfrac{4m^2t^2}{(t^2+2)^2}-2\cdot\dfrac{m^2-2}{t^2+2}}{(1+t^2)\cdot\dfrac{(m^2-2)^2}{(t^2+2)^2}}=3$,

…… (9 分)

整理可得 $(-3m^4+14m^2-8)t^2+(-3m^4+8m^2-4)=0$, ………………………………………… (10 分)

故 $\begin{cases}-3m^4+14m^2-8=0,\\ -3m^4+8m^2-4=0,\end{cases}$ 解得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………………… (11 分)

故存在点 $P\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ 或 $P\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ 满足条件. …………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查导数在函数问题中的应用.

解析 (Ⅰ)设 $g(x)=\lambda x^2+\ln \operatorname{ch} x=\lambda x^2-\ln 2+\ln(e^x+e^{-x})$.

$\because g(x)$ 为偶函数，$\therefore$ 只需 $x\geqslant0$ 时 $g(x)\leqslant0$.

$g(0)=0$, $g'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+2\lambda x$, $g'(0)=0$. ……………………………………………… (1 分)

令 $m(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+2\lambda x$，则 $m'(x)=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}+2\lambda=\dfrac{4}{e^{2x}+e^{-2x}+2}+2\lambda\leqslant1+2\lambda$. …………… (2 分)

①当 $\lambda\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，$m'(x)\leqslant0$，$\therefore\forall x\geqslant0$，$g'(x)$ 单调递减，$g'(x)\leqslant g'(0)=0$，$g(x)$ 单调递减，

$\therefore\forall x\geqslant0$，$g(x)\leqslant0$ 恒成立. ……………………………………………………………… (3 分)

②当 $\lambda\geqslant0$ 时，$m'(x)>0$，$\therefore\forall x\geqslant0$，$g'(x)$ 单调递增，$g'(x)\geqslant g'(0)=0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore\forall x\geqslant0$，$g(x)\geqslant0$ 恒成立，不满足题意. …………………………………………………… (4 分)

③当 $-\dfrac{1}{2}<\lambda<0$ 时，若 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{-\sqrt{2\lambda+1}-1-\lambda}{\lambda}\right)$，则 $m'(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，$g'(x)>g'(0)=0$，

$g(x)$ 单调递增，$g(x)>g(0)=0$，不满足题意.

综上 $\lambda\leqslant-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)(ⅰ) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$. ………………………………………………………………… (7 分)

(ⅱ)由条件知 $(2\operatorname{ch} x)_{\min}<[a(-\operatorname{ch}^2x+4\operatorname{sh} x-1)]_{\max}$.

$\because(\operatorname{ch} x)'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\therefore$ 当 $x\geqslant1$ 时 $(\operatorname{ch} x)'>0$,

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

$\therefore y=\mathrm{ch}\,x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore \mathrm{ch}\,x\geqslant \mathrm{ch}\,1$，即 $(2\mathrm{ch}\,x)_{\min}=2\mathrm{ch}\,1=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}$. ………………………（8分）

令 $h(x)=a(-\mathrm{ch}^2x+4\mathrm{sh}\,x-1)$，则 $h(x)=a(-1-\mathrm{sh}^2x+4\mathrm{sh}\,x-1)=a[-(\mathrm{sh}\,x-2)^2+2]$.

$\because a>0, x\geqslant 1, y=\mathrm{sh}\,x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\leqslant \mathrm{sh}\,x$，

$\therefore h(x)_{\max}=2a$. ………………………………………………………………………………（9分）

$\therefore \mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}<2a$，即 $a>\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. ………………………………………………………（10分）

设 $t(a)=(\mathrm{e}-1)\ln a-a+1$，则 $t'(a)=\frac{\mathrm{e}-1}{a}-1=\frac{\mathrm{e}-1-a}{a}$，$a>\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

当 $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<a<\mathrm{e}-1$ 时，$t'(a)>0$，$t(a)$ 单调递增，当 $a>\mathrm{e}-1$ 时，$t'(a)<0$，$t(a)$ 单调递减，

$\therefore t(a)$ 至多有两个零点，而 $t(1)=t(\mathrm{e})=0$，……………………………………………………（11分）

$\therefore$ 当 $a>\mathrm{e}$ 时，$t(a)<0$，$(\mathrm{e}-1)\ln a<a-1$；

当 $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<a<\mathrm{e}$ 时，$t(a)>0$，$(\mathrm{e}-1)\ln a>a-1$；

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$t(a)=0$，$(\mathrm{e}-1)\ln a=a-1$. ……………………………………………………（12分）

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程的互化，极坐标方程与直角坐标方程的互化.

解析 （Ⅰ）直线 l_1 的参数方程消去参数 m，得普通方程为 $y=\frac{1}{k}(x+2)$，………………………（1分）

利用 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 l_2 的直角坐标方程为 $y=k(x-2)$. …………………………………（2分）

设 $P(x,y)$，由题设得 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ y=\frac{1}{k}(x+2).\end{cases}$

消去 k 得 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$.

所以 C_2 的普通方程为 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$. ……………………………………………………（4分）

故 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=4(\rho\sin\theta\neq 0)$. ………………………………………………（5分）

（Ⅱ）将 $C_1:\begin{cases}x=4\cos^2\alpha,\\ y=4\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）消去参数，可得 $(x-2)^2+y^2=4$，………………………（6分）

化为极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. ……………………………………………………………………（7分）

令 $\theta=\frac{\pi}{6}$，则 $|OA|=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$，$|OB|=\sqrt{\frac{4}{\cos\frac{\pi}{3}}}=2\sqrt{2}$，………………………………（8分）

所以 $|AB|=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. ……………………………………………………（10分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的解法及基本不等式的应用.

解析 （Ⅰ）$f(x)=|x-1|+2|x|=\begin{cases}-3x+1, x\leqslant 0,\\ x+1, 0<x<1,\\ 3x-1, x\geqslant 1.\end{cases}$ ……………………………………（1分）

当 $x\leqslant 0$ 时，由 $f(x)\geqslant 2$，得 $-3x+1\geqslant 2$，解得 $x\leqslant -\frac{1}{3}$；……………………………………（2分）

当 $0<x<1$ 时，由 $f(x)\geqslant 2$，得 $x+1\geqslant 2$，无解；……………………………………………（3分）

当 $x\geqslant 1$ 时，由 $f(x)\geqslant 2$，得 $3x-1\geqslant 2$，解得 $x\geqslant 1$. ……………………………………（4分）

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601
9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

所以 $f(x)\geqslant 2$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant -\frac{1}{3}\text{或}x\geqslant 1\right\}$ …………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$f(x)=2$ 时，$x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=1$，$f(x)$ 的图象与直线 $y=2$ 围成的图形为三角形，该三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{2}{3}$，所以 $a+b+c=\frac{2}{3}$. …………………………（6 分）

因为
$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=\frac{3}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(14+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{9a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{9b}{c}+\frac{4c}{b}\right)$$
$$\geqslant\frac{3}{2}\left(14+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{9a}{c}\cdot\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{9b}{c}\cdot\frac{4c}{b}}\right)=54,$$ …………………………（8 分）

所以 $bc+4ac+9ab\geqslant 54abc$. …………………………（10 分）

自主选拔在线 微信号：zizzsw

自主选拔在线 微信号：zizzsw

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

微信搜一搜
自主选拔在线