2022～2023学年新乡高三第三次模拟考试
数学参考答案(理科)

1. C　因为 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2,3\}$.

2. B　因为 $(2+\mathrm{i})z=-3+4\mathrm{i}$，所以 $|z|=|\frac{-3+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}|=\frac{|-3+4\mathrm{i}|}{|2+\mathrm{i}|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

3. A　设公差为 d，因为 a_2,a_4,a_5 成等比数列，所以 $6^2=(6-2d)(6+d)$，解得 $d=0$（舍去）或 $d=-3$，所以 $a_1=15$，$S_6=6\times15+\frac{6\times5}{2}\times(-3)=45$.

4. C　$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(-x)=\frac{3\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{1+|x|}=\frac{3\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}}{1+|x|}=-\frac{3\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{1+|x|}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除B，D. 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，故选 C.

5. D　对于 A，2022 年春节档平均每场观影人数为 $\frac{11446}{315}\approx36$，2023 年春节档平均每场观影人数为 $\frac{12921}{266}\approx49$，所以 A 选项错误；

对于 B，这 4 年中，每年春节档上映新片的数量从小到大排列为 7，8，8，10，所以众数为 8，B 选项错误；

对于 C，这 4 年中，每年春节档票房的极差为 78.43－59.05＝19.38 亿元，C 选项错误；

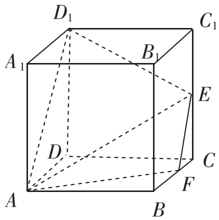
对于 D，这 4 年平均每部影片的观影人数依次大约为 1653 万，1605 万，1431 万，1846 万，所以 D 选项正确.

6. B　画出可行域（图略）知，当直线 $z=-\frac{1}{2}x+y$ 经过点 $(-2,5)$ 时，z 最大，且 z 的最大值为 6.

7. D　依题意得 $x_0^2=2px_0$，因为 $x_0\neq0$，所以 $x_0=2p$. 又 $|MF|=x_0+\frac{p}{2}=5$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

8. B　因为点 $B(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 在 $f(x)$ 的图象上，所以 $f(0)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 因为 $f(x)$ 图象的一个对称中心是 $A(\frac{\pi}{8},0)$，所以 $\frac{\omega\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\omega=2+8k$，$k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<\omega<10$，所以 $\omega=2$，则 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{4})$，A 正确. $f(\frac{5\pi}{8})=\cos\frac{3\pi}{2}=0$，则直线 $x=\frac{5\pi}{8}$ 不是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，B 不正确. 当 $x\in[\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in[2\pi,3\pi]$，$f(x)$ 单调递减，C 正确. $f(x+\frac{\pi}{8})=\cos(2x+\frac{\pi}{2})=-\sin 2x$，是奇函数，D 正确.

9. A　如图，取 BC 的中点 F，连接 EF，AF，则 $EF\parallel AD_1$.



$V_{CEF-ADD_1}=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}\ S_{下}})h=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}+2+1)\times 2=\frac{7}{3}$，$V_{剩余}=$

$V_{正方体}-V_{CEF-ADD_1}=8-\frac{7}{3}=\frac{17}{3}$，故 $\frac{17}{3}\div\frac{7}{3}=\frac{17}{7}$.

10. D　设直线 $y=k(x+c)(0<k<\frac{b}{a})$ 与双曲线 C 的左支交于点 M，右支交于点 N，由双曲线的定义，得 $|NF_1|-|NF_2|=|MF_1|=2a$，$|MF_2|-|MF_1|=2a$，所以 $|MF_2|=4a$，在 $\triangle MF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=2c$，$|MF_1|=2a$，$|MF_2|=4a$，由余弦定理得 $4c^2=4a^2+16a^2-2\times 2a\times 4a\cos 120^\circ$，整理得 $c^2=7a^2$，所以 $\frac{c}{a}=\sqrt{7}$.

11. A　因为当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=x(2-x)=-(x-1)^2+1$，$f(x-2)=2f(x)$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)$，即若 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的点的横坐标增加 2，则对应 y 值变为原来的 $\frac{1}{2}$，若减少 2，则对应 y 值变为原来的 2 倍.

当 $x\in(2,4]$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{1}{2}$，令 $-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，解得 $x_1=\frac{7}{2}$，$x_2=\frac{5}{2}$（舍去），因为当 $x\in[a,+\infty)$ 时，$f(x)\leqslant\frac{3}{8}$ 成立，所以 $a\geqslant\frac{7}{2}$.

12. B　令 $f(x)=e^x-x-1$，$h(x)=x-\sin x$，$g(x)=\sin x-x+x^2$，则 $f'(x)=e^x-1$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，即 $f(x)\geqslant f(0)=0$（当 $x=0$ 时，等号成立），所以 $f(\frac{1}{e}-1)=e^{\frac{1}{e}-1}-(\frac{1}{e}-1)-1=e^{\frac{1}{e}-1}-\frac{1}{e}>0$，即 $e^{\frac{1}{e}-1}>\frac{1}{e}$.

而 $h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，故 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

因为 $\frac{1}{e}>0$，$h(\frac{1}{e})>h(0)=0$，所以 $\frac{1}{e}>\sin\frac{1}{e}$，即 $e^{\frac{1}{e}-1}>\sin\frac{1}{e}$，即 $a>b$.

$g'(x)=\cos x-1+2x$，令 $u(x)=\cos x-1+2x$，则 $u'(x)=2-\sin x>0$，

故 $u(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增，当 $x>0$ 时，$g'(x)=u(x)>u(0)=0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(\frac{1}{e})=\sin\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+(\frac{1}{e})^2=\sin\frac{1}{e}-\frac{e-1}{e^2}>0$，

即 $\sin\frac{1}{e}>\frac{e-1}{e^2}$，$b>c$. 综上，$e^{\frac{1}{e}-1}>\sin\frac{1}{e}>\frac{e-1}{e^2}$，即 $c<b<a$.

13. 16　因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(t-7,6)$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $2(t-7)-3\times 6=0$，解得 $t=16$.

14. 6　由 $a_{n+1}-a_n=4n$，得 $a_n-a_{n-1}=4(n-1)$，$a_{n-1}-a_{n-2}=4(n-2)$，…，$a_2-a_1=4$，将这 $n-1$ 个式子累加得 $a_n-a_1=2n(n-1)$，所以 $\frac{a_n}{n}=2n-2+\frac{8}{n}\geqslant 6$，当且仅当 $n=2$ 时，等号成立.

15. 8　若甲第一棒，则乙必须第二棒，此时有 A_2^2 种交接棒顺序；

若甲第二棒，则乙必须第一棒或者第三棒，此时丙只能在第四棒，所以有 2 种交接棒顺序；

若甲第三棒，则乙必须第二棒或者第四棒，此时丙只能在第一棒，所以有 2 种交接棒顺序；若甲第四棒，则乙必须第三棒，此时有 A_2^2 种交接棒顺序. 故共有 8 种不同的交接棒顺序.

16. $\frac{27}{4}$　因为 $AB\perp BC$，$\angle CAB=60^\circ$，所以 $AB=\frac{1}{2}AC$，E 为 AC 的中点，且 $DE=AB$，所以 $DE=AB=\frac{1}{2}AC$，所以 $\triangle ACD$ 是直角三角形，$\angle ADC=90^\circ$，所以 $DE=AB=EB=\frac{1}{2}AC$，则 E 就是球 O 的球心，即 E 与球心 O 重合，因为 $\angle ADC=90^\circ$，$BD\perp CD$，$AD\cap BD=D$，所以 $CD\perp$ 平面 ABD，所以 $CD\perp AB$，又 $AB\perp BC$，$BC\cap CD=C$，$AB\perp$ 平面 BCD，所以平面 $BCD\perp$ 平面 ABC. 因为球 O 的体积为 36π，可得球 O 的半径为 3，则 $AC=6$，$AB=3$，$BC=3\sqrt{3}$，设 BC 的中点为 H，则 $DH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以三棱锥 $D-ABC$ 的体积 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{27}{4}$.

17. 解：(1) 因为 $\sqrt{3}b\sin\frac{A}{2}-a\sin B=0$，所以 $\sqrt{3}\sin B\sin\frac{A}{2}-\sin A\sin B=0$，………… 2 分

因为 $\sin B\neq0$，所以 $\sin A=\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}$，$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}$. ………… 4 分

因为 $\sin\frac{A}{2}\neq0$，所以 $\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $\frac{A}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{15}+3$，$a=3$，所以 $b+c=\sqrt{15}$，………… 7 分

由余弦定理得 $9=b^2+c^2-bc$，即 $9=(b+c)^2-3bc$，解得 $bc=2$，………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………… 12 分

18. (1) 解：由题可知，甲盒子中有 2 个红球和 2 个黄球的概率 $P=\frac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}=\frac{18}{35}$. ………… 5 分

(2) 证明：当 $i=1$ 时，X 的取值可能为 2，3，4，

且 $P(X=2)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_4^1C_4^1}=\frac{9}{16}$，$P(X=3)=\frac{2C_3^1C_1^1}{C_4^1C_4^1}=\frac{3}{8}$，$P(X=4)=\frac{C_1^1C_1^1}{C_4^1C_4^1}=\frac{1}{16}$，

则 $E_1(X)=2\times\frac{9}{16}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{1}{16}=\frac{5}{2}$. ………… 8 分

当 $i=3$ 时，X 的取值可能为 0，1，2，

且 $P(X=0)=\frac{C_3^3C_3^3}{C_4^3C_4^3}=\frac{1}{16}$，$P(X=1)=\frac{2C_3^2C_3^3}{C_4^3C_4^3}=\frac{3}{8}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^2}{C_4^3C_4^3}=\frac{9}{16}$，

则 $E_3(X)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{9}{16}=\frac{3}{2}$. ………… 11 分

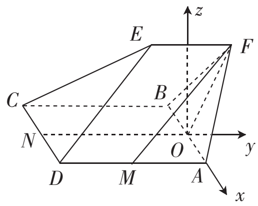
故 $E_1(X)+E_3(X)=4$. ………… 12 分

19.(1)证明:因为 $EF /\!/ AD$,$EF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$,$M$ 是 AD 的中点,所以 $EF /\!/ DM$,且 $EF=DM$, …………………………………………………………………………… 2分

所以四边形 $DEFM$ 是平行四边形,从而 $MF /\!/ DE$. ………………………………… 3分

因为 $MF\not\subset$ 平面 ECD,$DE\subset$ 平面 ECD,所以 $MF /\!/$ 平面 ECD. ………………… 4分

(2)解:取 AB 的中点 O,连接 FO,过点 O 作 AD 的平行线 ON 交 CD 于 N,以 O 为原点,$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{NO}$ 的方向分别为 x,y 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



因为 $\triangle ABF$ 是等边三角形,所以 $FO\perp AB$.

因为 $AB=4$,所以 $OF=2\sqrt{3}$,且 $NO\perp AB$,

所以 $\angle NOF$ 就是二面角 $F-AB-D$ 的平面角,$\angle NOF=120^\circ$, ………………… 5分

则 $F(0,\sqrt{3},3)$,$B(-2,0,0)$,$C(-2,-4,0)$,$A(2,0,0)$,$\overrightarrow{CB}=(0,4,0)$,$\overrightarrow{BF}=(2,\sqrt{3},3)$,$\overrightarrow{AB}=(-4,0,0)$. …………………………………………………………………… 6分

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 CBF 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4y_1=0,\\ 2x_1+\sqrt{3}y_1+3z_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=2$,得 $\boldsymbol{n}_1=(-3,0,2)$. …………………………………………………… 8分

设 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 ABF 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2+\sqrt{3}y_2+3z_2=0,\\ -4x_2=0,\end{cases}$

取 $z_2=1$,得 $\boldsymbol{n}_2=(0,-\sqrt{3},1)$, ………………………………………………… 10分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{\sqrt{13}\times 2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$,

易知二面角 $C-BF-A$ 为锐角,所以它的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$. ………………………… 12分

20.解:(1)由题意得 $a+c=4+2\sqrt{3}$,$a=2b$, ……………………………………… 1分

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, ……………………………………………………… 2分

所以 $a+\frac{\sqrt{3}}{2}a=4+2\sqrt{3}$,解得 $a=4$,$b=2$,

则椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………… 4分

(2)当过 P 的切线斜率存在,即 $x_0\neq\pm 1$,$y_0\neq\frac{\sqrt{15}}{2}$ 时,设其方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,即 $y=kx+y_0-kx_0$, ……………………………………………………………………… 5分

令 $y=0$,得切线与 x 轴的交点坐标为 $(x_0-\frac{y_0}{k},0)$.因为切线和圆 O 相切,所以 $\frac{|y_0-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}=$

1，化简得$(1-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0^2=0$，则有 $k_1+k_2=-\frac{2x_0y_0}{1-x_0^2}$，$k_1k_2=\frac{1-y_0^2}{1-x_0^2}$. ……… 7 分

设切线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2，则 $M(x_0-\frac{y_0}{k_1},0)$，$N(x_0-\frac{y_0}{k_2},0)$，

所以 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|x_M-x_N||y_0|=\frac{1}{2}|\frac{y_0^2(k_1-k_2)}{k_1k_2}|=\frac{1}{2}y_0^2\sqrt{\frac{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}{(k_1k_2)^2}}$

$=\frac{1}{2}y_0^2\sqrt{\frac{(\frac{2x_0y_0}{1-x_0^2})^2-4\times\frac{1-y_0^2}{1-x_0^2}}{(\frac{1-y_0^2}{1-x_0^2})^2}}=y_0^2\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2-1}{(1-y_0^2)^2}}$. ………………………………… 8 分

因为 P 在椭圆 C 上，所以有 $x_0^2=16-4y_0^2$，代入上式化简可得 $S_{\triangle PMN}=y_0^2\sqrt{\frac{15-3y_0^2}{(1-y_0^2)^2}}$.

令 $t=1-y_0^2$，得 $y_0^2=1-t$，$t\in[-3,0)$，

则 $S_{\triangle PMN}=(1-t)\sqrt{\frac{12+3t}{t^2}}=\sqrt{3}\times\sqrt{t-\frac{7}{t}+\frac{4}{t^2}+2}$. …………………………………… 9 分

令 $g(t)=t-\frac{7}{t}+\frac{4}{t^2}+2$，则 $g'(t)=\frac{t^3+7t-8}{t^3}=\frac{(t-1)(t^2+t+8)}{t^3}$，当 $t\in[-3,0)$时，$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增，$g(t)_{\min}=g(-3)=\frac{16}{9}$，即$(S_{\triangle PMN})_{\min}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 10 分

当过 P 的切线斜率不存在时，此时 $P(1,\frac{\sqrt{15}}{2})$或 $P(-1,\frac{\sqrt{15}}{2})$.

若 P 点的坐标为$(1,\frac{\sqrt{15}}{2})$，可得与圆 O 相切的两条切线方程分别为 $x=1$，$y=\frac{11\sqrt{15}}{60}x+\frac{19\sqrt{15}}{60}$，则 $M(-\frac{19}{11},0)$，$N(1,0)$，此时 $S_{\triangle PMN}=\frac{15\sqrt{15}}{22}$. ………………………………… 11 分

若 P 点的坐标为$(-1,\frac{\sqrt{15}}{2})$，由对称性可得 $S_{\triangle PMN}=\frac{15\sqrt{15}}{22}$，

因为$\frac{15\sqrt{15}}{22}>\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以$\triangle PMN$ 面积的最小值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ………………………………… 12 分

21.(1)解：因为 $f(x)=\frac{1}{a}e^x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{a}e^x$. ………………………………………… 1 分

因为原点 O 不在 $f(x)$的图象上，设切点为 $A(x_0,y_0)$，

所以切线的斜率 $k=\frac{1}{a}e^{x_0}=\frac{\frac{1}{a}e^{x_0}}{x_0}$，解得 $x_0=1$， ………………………………………… 3 分

所以 $A(1,\frac{e}{a})$，$k=\frac{e}{a}$，所以切线的方程为 $y-\frac{e}{a}=\frac{e}{a}(x-1)$，即 $y=\frac{e}{a}x$. ……………… 4 分

(2)证明：(方法一)①当 $a=1$ 时，要证 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}ax+\sqrt{x+1}$成立，即证 $e^x\geqslant\frac{1}{2}x+\sqrt{x+1}$，

也即 $e^x-\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}\geqslant 0$. ………………………………………………………… 5 分

因为 $e^x\geqslant x+1$,所以 $e^x-\frac{x}{2}\geqslant\frac{x}{2}+1$,又 $\frac{x}{2}+1=\frac{1+1+x}{2}\geqslant\sqrt{1+x}$,所以 $e^x-\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ $\geqslant 0$,即 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}ax+\sqrt{x+1}$. ………………………………………………………… 7 分

②当 $0<a\leqslant\frac{2}{e}$ 时,$f(x)\geqslant\frac{1}{2}ax+\sqrt{x+1}$ 即 $\frac{e^x}{a}\geqslant\frac{a}{2}x+\sqrt{x+1}$,即要证 $\frac{e^x}{a}-\frac{a}{2}x\geqslant\sqrt{x+1}$.

………………………………………………………………………………………… 8 分

令 $g(x)=\frac{e^x}{a}-\frac{ax}{2}-(e^x-\frac{x}{2})$,则 $g(x)=(\frac{1}{a}-1)e^x+\frac{1-a}{2}x=(1-a)(\frac{e^x}{a}+\frac{x}{2})$,

当 $0<a\leqslant\frac{2}{e}$ 时,$g'(x)=(1-a)(\frac{e^x}{a}+\frac{1}{2})>0$,所以 $g(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增,… 9 分

从而 $g(x)\geqslant g(-1)=(1-a)(\frac{1}{ae}-\frac{1}{2})\geqslant 0$,即当 $x\in[-1,+\infty)$ 时,$\frac{e^x}{a}-\frac{ax}{2}\geqslant e^x-\frac{x}{2}$.

由①知 $e^x-\frac{x}{2}\geqslant\sqrt{x+1}$,所以 $\frac{e^x}{a}-\frac{ax}{2}>\sqrt{x+1}$. ………………………………………… 11 分

综上,当 $a=1$ 或 $0<a\leqslant\frac{2}{e}$ 时,$f(x)\geqslant\frac{1}{2}ax+\sqrt{x+1}$. ………………………………… 12 分

(方法二)当 $a=1$ 时,同上. 当 $0<a\leqslant\frac{2}{e}$ 时,要证 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}ax+\sqrt{x+1}$,即证 $\frac{e^x}{a}\geqslant\frac{a}{2}x+$ $\sqrt{x+1}$,亦即 $\frac{e^x}{a}-\frac{a}{2}x-\sqrt{x+1}\geqslant 0$. ……………………………………………………… 8 分

令 $h(a)=\frac{e^x}{a}-\frac{a}{2}x-\sqrt{x+1}$,则 $h'(a)=-\frac{e^x}{a^2}-\frac{x}{2}\leqslant-\frac{e^{x+2}}{4}-\frac{x}{2}\leqslant-\frac{e}{4}+\frac{1}{2}<0$,所以 $h(a)$ 在 $(0,\frac{2}{e}]$ 上单调递减,

所以只需证明 $h(\frac{2}{e})=\frac{e^{x+1}}{2}-\frac{x}{e}-\sqrt{x+1}\geqslant 0(x\geqslant -1)$. …………………………………… 9 分

由①知 $e^x-\frac{x}{2}\geqslant\sqrt{x+1}$,下面只要证明 $\frac{e^{x+1}}{2}-\frac{x}{e}-(e^x-\frac{x}{2})\geqslant 0(x\geqslant -1)$.

令 $F(x)=\frac{e^{x+1}}{2}-\frac{x}{e}-(e^x-\frac{x}{2})$,所以 $F'(x)=\frac{e^{x+1}}{2}-\frac{1}{e}-(e^x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}+(\frac{e}{2}-1)e^x>$ 0,从而 $F(x)\geqslant F(-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}-(\frac{1}{e}+\frac{1}{2})=0$. ………………………………… 11 分

综上,当 $a=1$ 或 $0<a\leqslant\frac{2}{e}$ 时,$f(x)\geqslant\frac{1}{2}ax+\sqrt{x+1}$. ………………………………… 12 分

22. 解:(1)由曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha+\sin\alpha,\\ y=\cos\alpha-2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),可得 $x^2+y^2=5\cos^2\alpha+$ $5\sin^2\alpha=5$,即曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2=5$. ………………………………………… 2 分

由 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$,得 $\rho(\sin\theta+\cos\theta)=4$,直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$. ……………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)设 $P(x,4-x)$,若 $\angle APB\geqslant\frac{\pi}{2}$,则 $\angle APO\geqslant\frac{\pi}{4}$, ………………………………… 5 分

所以 $\sin\angle APO\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $|OP|\leqslant\sqrt{2}|OA|$, ……………………………………………… 7 分

所以 $\sqrt{x^2+(4-x)^2}\leqslant\sqrt{10}$, ……………………………………………………………… 8 分

化简得 $x^2-4x+3\leqslant0$, ………………………………………………………………………… 9 分

解得 $1\leqslant x\leqslant3$,即点 P 的横坐标的取值范围为 $[1,3]$. ………………………………… 10 分

23.(1)解:若 $a=1$,则 $f(x)=|x+1|+|x-6|$.

当 $x<-1$ 时,$f(x)=-x-1-x+6=-2x+5\leqslant11$,解得 $x\geqslant-3$,所以 $-3\leqslant x<-1$;……………………………………………………………………………………………… 2 分

当 $-1\leqslant x<6$ 时,$f(x)=x+1-x+6=7\leqslant11$ 成立,所以 $-1\leqslant x<6$; …………………… 3 分

当 $x\geqslant6$ 时,$f(x)=x+1+x-6=2x-5\leqslant11$,解得 $x\leqslant8$,所以 $6\leqslant x\leqslant8$. ………………… 4 分

综上,原不等式的解集为 $[-3,8]$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)证明:$f(x)=|x+a|+|x-6|\geqslant|(x+a)-(x-6)|=|a+6|$,当且仅当 $(x+a)(x-6)\leqslant0$ 时,等号成立,…………………………………………………………………………………… 6 分

由 $|a+6|=8$,$a<0$,解得 $a=-14$,所以 $m+n=14$. ……………………………………………… 7 分

因为 $m^2+n^2\geqslant2mn$, ……………………………………………………………………………… 8 分

所以 $2(m^2+n^2)\geqslant m^2+n^2+2mn=(m+n)^2=14^2$, ……………………………………………… 9 分

所以 $m^2+n^2\geqslant98$,当且仅当 $m=n=7$ 时,等号成立. …………………………………………… 10 分