

参考答案

1. A

整理复数成 $Z = a + bi (a, b \in R)$ ，实部与虚部相等列方程求解.

由题可知 $Z = a + \frac{i-1}{1+i} = a + \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = a + i$ ，又复数 Z 实部与虚部相等，所以 $a = 1$ ，故选 A.

本题考查了复数知识及复数运算，利用复数相关知识列方程求解.

2. C

先 5 人分成 4 组，其中一组 2 人，再分配到 4 个不同的村子即可.

根据题意，5 个同学分 4 组，其中一组有 2 名同学，共有 C_5^2 种不同的分组方法，

再安排 4 组同学去 4 个不同的村子，共有 A_4^4 种不同的安排方法，

由分步乘法计数原理可得 $C_5^2 \cdot A_4^4 = 240$ ，

故选：C.

3. A

利用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 可求得 $\cos \alpha$ ，同理可求得 $\cos \beta$ ，再由两角和与差的余弦函数求得 $\alpha + \beta$ 的余弦，从而可求得 $\alpha + \beta$.

$\because \alpha, \beta$ 为锐角，且 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ， $\therefore \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ，

$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，又 α, β 为锐角，

所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$ ， $\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

故选 A

本题考查 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 的应用，考查两角和与差的余弦，考查运算能力，属于中档题.

4. B

试题分析：利用奇偶函数得出当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+1), & x \in [0, 2) \\ 1 - |x-4|, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$ ， $x \geq 0$ 时，

$f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+1), & x \in [0, 2) \\ x-3, & x \in [2, 4] \\ 5-x, & x \in (4, +\infty) \end{cases}$ ，画出图象，根据对称性得出零点的值满足 $x_1 + x_2$ ，

$x_4 + x_5$ 的值，关键运用对数求解 $x_3 = 1 - 3^n$ ，整体求解即可.

解：∵定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，

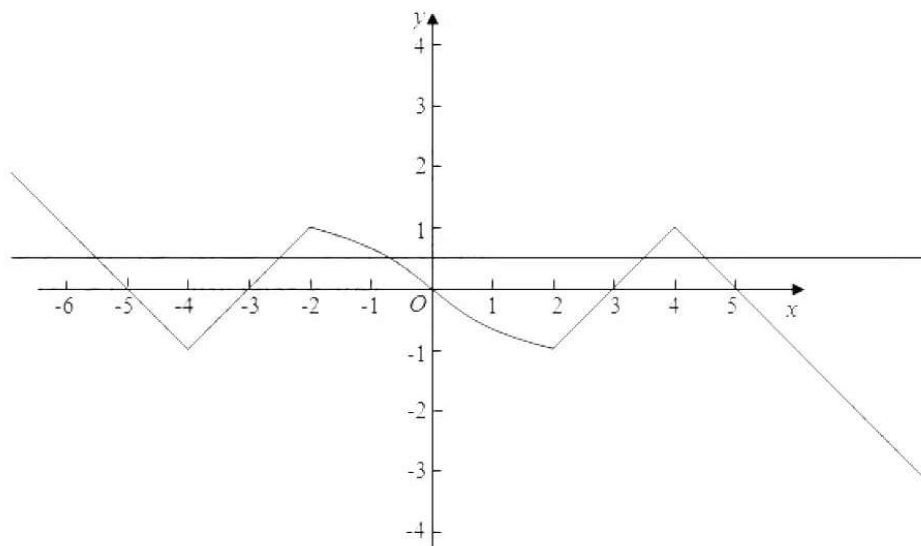
$$\therefore f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore \text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+1), & x \in [0, 2) \\ 1 - |x-4|, & x \in [2, +\infty) \end{cases},$$

$$\therefore \text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+1), & x \in [0, 2) \\ x-3, & x \in [2, 4] \\ 5-x, & x \in (4, +\infty) \end{cases},$$

$$\text{得出 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} \log_3(1-x), & x \in (-2, 0) \\ |x+4| - 1, & x \in (-\infty, -2] \end{cases}$$

画出图象得出：



如图从左向右零点为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ，

根据对称性得出： $x_1 + x_2 = -4 \times 2 = -8$ ，

$$x_4 + x_5 = 2 \times 4 = 8, \quad -\log_{\frac{1}{3}}(-x_3+1) = a, \quad x_3 = 1 - 3^a,$$

$$\text{故 } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -8 + 1 - 3^a + 8 = 1 - 3^a,$$

故选 B

考点：函数的零点与方程根的关系．

5. C

分析：根据分类计数原理，“东亚文化之都——泉州”“二日游”，任意相邻两天组合一起，

共有 6 种情况, 如①②, ②③, ③④, ④⑤, ⑤⑥, ⑥⑦, 分两种情况讨论即可.

详情: 任意相邻两天组合一起, 一共有 6 种情况, 如①②, ②③, ③④, ④⑤, ⑤⑥, ⑥⑦,

若李雷选①②或⑥⑦, 则韩梅梅有 4 种选择,

选若李雷选②③或③④或④⑤或⑤⑥, 则韩梅梅有 3 种选择,

故他们不同一天出现在泉州, 则他们出游的不同方案共有 $2 \times (4+6) = 20$,

故答案为 C

点睛: 本题主要考查计数原理, 意在考查计数原理等基础知识的掌握能力和分类讨论思想的运用能力.

6. C

根据 $g(x) = f(x+2)$ 是奇函数, 确定函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(2, 0)$, 再根据函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数, 确定函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上为增函数, 由 $g(-2) = 0$ 以及函数 $f(x)$ 的对称性, 得出 $f(0) = f(4) = 0$. 画出函数 $f(x)$ 图象的草图, 结合图象确定不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集.

$\because g(x) = f(x+2)$ 是奇函数.

$\therefore$ 函数 $g(x) = f(x+2)$ 图象的对称中心为 $(0, 0)$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(2, 0)$ 且 $f(2) = 0$.

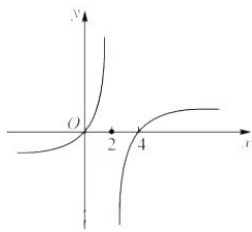
又 $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上为增函数.

$\because g(-2) = f(0) = 0$.

$\therefore$ 由对称性, $f(4) = 0$.

画出函数 $f(x)$ 图象的草图 (如图).



结合图象可得 $f(x) \geq 0$ 的解集是 $[0, 2] \cup [4, +\infty)$.

故选 C.

本题考查函数的单调性与奇偶性及其简单应用, 发展了学生的直观想象的核心素养, 属于中档题.

7. C

根据平面向量的数量积运算得出 x_0, y_0 的关系, 代入椭圆方程, 整理得出关于 x_0 的方程, 利用方程有解可建立关系求解.

由题可知 $M(a, 0)$, 设 $P(x_0, y_0)$, $-a < x_0 < a$,

则 $\overrightarrow{PO} = (-x_0, -y_0)$, $\overrightarrow{PM} = (a - x_0, -y_0)$,

$\because PO \perp PM$, $\therefore \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PM} = (-x_0)(a - x_0) + (-y_0)(-y_0) = 0$,

$\therefore y_0^2 = ax_0 - x_0^2 > 0$, 代入椭圆, 可得 $(b^2 - a^2)x_0^2 + a^3x_0 - a^2b^2 = 0$ 有解,

令 $f(x) = (b^2 - a^2)x^2 + a^3x - a^2b^2$, $x \in (-a, a)$,

$\because f(0) = -a^2b^2 < 0, f(a) = 0$,

$\Delta = (a^3)^2 - 4(b^2 - a^2)(-a^2b^2) = a^2(a^2 - 2c^2)^2 \geq 0$,

且对称轴满足 $0 < -\frac{a^3}{2(b^2 - a^2)} < a$, 即 $0 < \frac{a^3}{2(a^2 - b^2)} < a$,

$\therefore \frac{a^2}{2c^2} < 1, \therefore \frac{c^2}{a^2} > \frac{1}{2}$, $\therefore e = \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $0 < e < 1$, $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$.

故选: C.

8. C

依次判断每个选项的正误, 得到答案.

$a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} = 2a_n + \frac{1}{a_n} \therefore a_{n+1} - a_n + \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = a_n$ 即 $(a_{n+1} - a_n)(1 - \frac{1}{a_{n+1}a_n}) = a_n$

当 $0 < a_n < 1$ 时, $1 - \frac{1}{a_{n+1}a_n} < 0$, 故 $a_{n+1} < a_n$, A 错误

当 $a_n > 1$ 时, $1 - \frac{1}{a_{n+1}a_n} > 0$, 故 $a_{n+1} > a_n$, B 错误

对于 D 选项, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$, $a_2 + \frac{1}{a_2} = 2a_1 + \frac{1}{a_1} = \frac{9}{2} < \sqrt{23}$, D 错误

用数学归纳法证明选项 C

易知 $a_n > 0$ 恒成立

当 $n=1$ 时, $a_2 + \frac{1}{a_2} = 2a_1 + \frac{1}{a_1} = 3 > \sqrt{6}$, 成立

假设当 $n=k$ 时成立, $a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}} > \sqrt{2k+4}$, 即 $a_{k+1}^2 + \frac{1}{a_{k+1}^2} > 2k+2$

当 $n=k+1$ 时:

$$\left(a_{k+2} + \frac{1}{a_{k+2}}\right)^2 = \left(2a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}}\right)^2 = 4a_{k+1}^2 + \frac{1}{a_{k+1}^2} + 4 = a_{k+1}^2 + \frac{1}{a_{k+1}^2} + 3a_{k+1}^2 + 4 > 2k+6$$

即 $a_{k+2} + \frac{1}{a_{k+2}} > \sqrt{2k+6}$ 成立

故 $a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} > \sqrt{2n+4}$ 恒成立, 得证

故答案选 C

本题考查了数列的单调性, 数学归纳法, 综合性强, 技巧高, 意在考查学生对于数学知识, 方法, 性质的灵活运用.

9. ABC

利用抽样比即可判断从 B 校中抽取的样本数量; 利用对立事件及古典概型即可得到至少取到

1 件次品的概率; 根据线性回归直线必过样本中心点, 可得 a 的值; 根据相互独立的定义即可作出判断.

A. 由分层抽样, 应抽取人数为 $400 \times \frac{4}{7+4+3+6} = 80$, A 正确;

B. 至少取到 1 件次品的概率为 $1 - \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{3}{5}$, B 正确;

C. $\because$ 回归直线必过中心点 $(4, 3.7)$, $\therefore 0.4 \times 4 + \hat{a} = 3.7$, 即 $\hat{a} = 2.1$, C 正确;

D. 由于第一次取到球不放回, 因此会对第 2 次取球的概率产生影响, 因此 M、N 不是相互独立事件.

故选: ABC

10. ACD

$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 代入法判断选项 A 中 $f(2x) = 2f^2(x) - 1$ 是否成立; 根据函数的周

期性定义判断选项 B; 根据函数奇偶性定义判断选项 C; 利用导函数判断选项 D

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

对于 A: $2f^2(x) - 1 = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = f(2x)$, 故 A 正确;

对于 B: $f(x+T) = \frac{e^{x+T} + e^{-(x+T)}}{2}$, 不存在非零常数 T , 使 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 故 B 错误;

对于 C: $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 满足 $f'(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 是奇函数, 故 C 正确;

对于 D: 当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 故 D 正确.

故选: ACD.

11. ABC

根据题意画出图形, 证明 OP 、 OQ 、 ON 两两垂直, 结合三棱锥的体积公式和球的表面积公

式计算即可判断 A、B; 由 $NP = PQ = QN = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$ 构造正四面体, 利用等体积法和余弦公式

求出 $PN = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$, 结合对称性即可判断 C; 根据选项 C 的分析, 结合球和三棱锥的体积公式,

利用间接法即可求出几何体的体积, 进而判断 D.

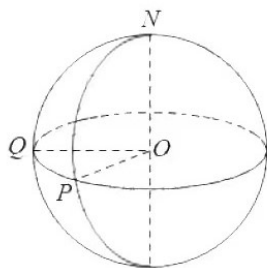


图1

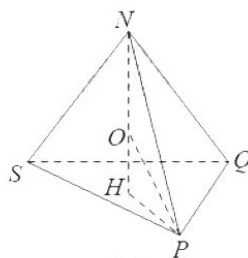


图2

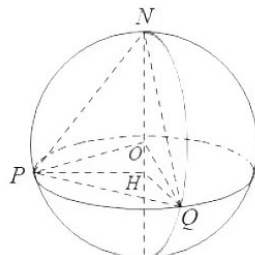


图3

如图 1, 因为 $OP = OQ = R$, $PQ = \sqrt{2}R$, 所以 $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$,

则 $OP \perp OQ$, 又 $ON \perp$ 赤道所在平面, 所以 OP 、 OQ 、 ON 两两垂直,

则三棱锥的体积 $V_{O-NPQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle OPQ} \cdot ON = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} R^2 \cdot R = \frac{1}{6} R^3$, 故 A 正确;

当 $OP = OQ = PQ = R$ 时, $\angle POQ = 60^\circ$,

则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为 $\frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{1}{2} S_{\text{球}} = \frac{1}{12} \times 4\pi R^2 = \frac{1}{3} \pi R^2$, 故 B 正确;

如图 2, 当 $NP = PQ = QN = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$ 时, $\triangle NPQ$ 为正三角形,

构造球内接正四面体 $N-PQS$, 其中心为 O , 连接 NO 交 SPQ 于 H ,

则 $NO = R$, OH 为正四面体 $N-PQS$ 内切球的半径, 由等体积法可得,

$$OH = \frac{1}{4}NH, \text{ 则 } OH = \frac{R}{3}, \cos \angle NOP = -\cos \angle HOP = -\frac{OH}{OP} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{在 } \triangle NOP \text{ 中, 由余弦定理可得 } \cos \angle NOP = \frac{ON^2 + OP^2 - NP^2}{2ON \cdot OP} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \frac{R^2 + R^2 - NP^2}{2R^2} = -\frac{1}{3}, \text{ 得 } PN = \frac{2\sqrt{6}}{3}R, \text{ 由对称性可得,}$$

$$\text{球面 } \triangle NPQ \text{ 的面积为 } \frac{1}{4}S_{\text{球}} = \frac{1}{4} \times 4\pi R^2 = \pi R^2, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{如图 3, 结合选项 C 的分析可知 } OH = \frac{R}{3}, \text{ 则 } \frac{NH}{2R} = \frac{2}{3}, PH = \frac{2\sqrt{2}}{3}R,$$

$\square PHQ$ 所在的截面将球分为大半球、小半球两部分,

$$\text{其中大半球的体积为 } \frac{2}{3}V_{\text{球}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{9}\pi R^3,$$

$$\text{在 } \triangle PHQ \text{ 中, 由余弦定理得, } \cos \angle PHQ = \frac{PH^2 + QH^2 - PQ^2}{2PH \cdot QH} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{得 } \angle PHQ = 120^\circ, \text{ 则 } S_{\triangle PHQ} = \frac{1}{2}PH \cdot QH \sin 120^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{9}R^2,$$

$$\text{有 } V_{O-PHQ} = \frac{1}{3}OH \cdot S_{\triangle PHQ} = \frac{2\sqrt{3}}{81}R^3,$$

$$\text{所以题意中构成几何体的体积为 } \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \frac{8}{9}\pi R^3 - \frac{2\sqrt{3}}{81}R^3 = \frac{8}{27}\pi R^3 - \frac{2\sqrt{3}}{81}R^3, \text{ 故 D 错误.}$$

故选: ABC.

12. AC

求出 $f(x)$ 在点 P 处的切线 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, 设 $g(x) = f(x) - y$, 由导数判断其单

调性, 研究函数 $g(x)$ 的零点即可判断选项 A; 求出 $f(x)$ 在点 P 处的切线

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ 将 } O(0,0) \text{ 和 } f'(x_0), f(x_0) \text{ 代入, 构造函数判断方程有无实根即}$$

可判断选项 B; 求出 $f(x)$ 的单调性, 构造函数 $F(x) = f(x) + f(2-x) - 4 (0 < x \leq 1)$,

证明 $F(x_1) \leq 0$, 即 $4 - f(x_1) \geq f(2-x_1)$, 即 $f(x_2) \geq f(2-x_1)$, 根据 $f(x)$ 的单调性可得出结

论, 可判断选项 C 和 D, 进而可得正确选项.

$$\text{对于选项 A: } f(x) = 2\ln x + x^2 + x \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = \frac{2}{x} + 2x + 1$$

$$\text{设点 } P(x_0, f(x_0)) \text{ 处切线为 } l, \text{ 则切线为 } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

$$\text{设 } g(x) = f(x) - y, \text{ 所以 } g'(x) = f'(x) - y' = f'(x) - f'(x_0)$$

$$g''(x) = f''(x) = -\frac{2}{x^2} + 2, \text{ 由 } g''(x) > 0 \text{ 可得: } x > 1; \text{ 由 } g''(x) < 0 \text{ 可得: } 0 < x < 1,$$

所以 $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ 在 $(0,1)$ 单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 单调递增,

令 $x_0 = 1$ 则 $g'(x) \geq g'(1) = f'(1) - f'(1) = 0$, 可得 $g(x) = f(x) - y$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,

而 $g(x_0) = f(x_0) - [f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0)] = 0$, 所以 $g(x) = f(x) - y$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点, 故选项 A 正确;

对于选项 B: 设点 $P(x_0, f(x_0))$ 则切线为 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, 若切线过点 $O(0,0)$, 可

$$\text{得 } 0 = -x_0 f'(x_0) + f(x_0) = -x_0 \left(\frac{2}{x_0} + 2x_0 + 1 \right) + 2 \ln x_0 + x_0^2 + x_0,$$

$$\text{即 } x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = 0, \text{ 令 } h(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x, \text{ 则 } h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x},$$

由 $h'(x) > 0$ 可得: $x > 1$; 由 $h'(x) < 0$ 可得: $0 < x < 1$,

所以 $h(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$ 在 $(0,1)$ 单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 单调递增,

$h(x) \geq h(1) = 1^2 + 2 - 2 \ln 1 = 3$, 所以 $h(x_0) = x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = 0$ 无解,

所以不存在过点 $O(0,0)$ 的切线, 故选项 B 不正确;

对于选项 C 和 D: $f'(x) = \frac{2}{x} + 2x + 1 > 0$, 所以可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,

由 $f(1) = 2$, $f(x_1) + f(x_2) = 4$, 设 $0 < x_1 \leq 1 \leq x_2$, 记 $F(x) = f(x) + f(2-x) - 4$, ($0 < x \leq 1$),

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= f'(x) - f'(2-x) = \frac{2}{x} + 2x + 1 - \left[\frac{2}{2-x} + 2(2-x) + 1 \right] \\ &= 4(1-x) \left[\frac{2}{x(2-x)} - 1 \right] = \frac{-4(x-1)^3}{x(2-x)} \geq 0, \text{ 所以 } F(x) \text{ 在 } (0,1) \text{ 单调递增, 因为 } 0 < x \leq 1, F(1) = 0, \end{aligned}$$

所以 $F(x_1) \leq 0$, 即 $4 - f(x_1) \geq f(2-x_1)$, 即 $f(x_2) \geq f(2-x_1)$,

根据 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, 可得 $x_2 \geq 2-x_1$, 所以 $x_1 + x_2 \geq 2$, 故选项 C 正确, 选项 D 不正确,

故选: AC.

求曲线过点 $A(a,b)$ 的切线的方程的一般步骤是:

(1) 设切点 $P, (x_0, f(x_0))$

(2) 求出 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处导数 $f'(x_0)$, 即 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率;

(3) 构建关系 $f'(x_0) = \frac{f(x_0) - b}{x_0 - a}$, 解得 x_0 ;

(4) 由点斜式求得切线方程 $y - b = f'(x_0) \cdot (x - a)$.

13. 262

根据条件列出不等式进行分析, 确定公比 q 、 k 、 d 的范围后再综合判断.

设等比数列公比为 q , 等差数列公差为 d , 因为 $c_{k-1} = 100$, $c_{k-1} = 1000$, 所以

$$\begin{cases} 1 + (k-2)d + q^{k-2} = 100 \\ 1 + kd + q^k = 1000 \end{cases} (*) ; \text{又因为 } \{a_n\}, \{b_n\} \text{ 分别为递增的等差数列、等比数列, 所以 } q \geq 2$$

且 $d \geq 1$; 又 $k=2$ 时 $1+1=100$ 显然不成立, 所以 $k \geq 3$, 则 $q^3 < 1000$, 即 $q \leq 9$;

因为 $q \geq 2$, $100 > q^{k-2} > 2^{k-2}$, 所以 $k \leq 8$; 因为 $(k-2)d \geq d$, 所以 $d \leq 100$;

由(*)可知: $q^k - q^{k-2} + 2d = 900$, 则 $2d = 900 - (q^k - q^{k-2}) < 200$, $q^{k-2}(q^2 - 1) > 700$; 又

$$c_k = 1 + kd + q^{k-1} = \frac{c_{k-1}}{2} + \frac{c_{k-1}}{2} - \frac{q^k}{2} - \frac{q^{k-2}}{2} = 550 - \frac{1}{2}q^{k-2}(q-1)^2 > 0,$$

$$\text{所以 } q^{k-2}(q-1)^2 < 1100, \text{ 则有 } \begin{cases} q^{k-2}(q^2 - 1) > 700 \\ q^{k-2}(q-1)^2 < 1100 \end{cases}$$

$$\text{根据 } \begin{cases} 3 \leq k \leq 8 \\ 2 \leq q \leq 9 \end{cases} \text{ 可解得符合条件的解有: } \begin{cases} k=4 \\ q=6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k=3 \\ q=9 \end{cases}; \text{ 当 } \begin{cases} k=4 \\ q=6 \end{cases} \text{ 时, } 1+4d+6^4=1000,$$

$$\text{解得 } d < 0 \text{ 不符, 当 } \begin{cases} k=3 \\ q=9 \end{cases} \text{ 时, 解得 } d=90, \text{ 符合条件; 则 } c_k = 550 - \frac{1}{2} \cdot 9^{3-2} (9-1)^2 = 262.$$

本题考查等差等比数列以及数列中项的存在性问题, 难度较难. 根据存在性将变量的范围尽量缩小, 通过不等式确定参变的取值范围, 然后再去确定符合的解, 一定要注意带回到原题中验证, 看是否满足.

$$14. \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

根据新定义结合向量数量积的坐标表示, 可得结果.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{k})$$

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{i}^2 + 2\vec{i} \cdot \vec{k} + \vec{i} \cdot \vec{j} - 2\vec{j} \cdot \vec{k}$$

$$\text{由 } \vec{i}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{k} = |\vec{i}| |\vec{k}| \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = |\vec{j}| |\vec{k}| \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

本题考查对新定义的理解，还考查向量数量积的坐标表示，属基础题.

$$15. 4\sqrt{3}\pi$$

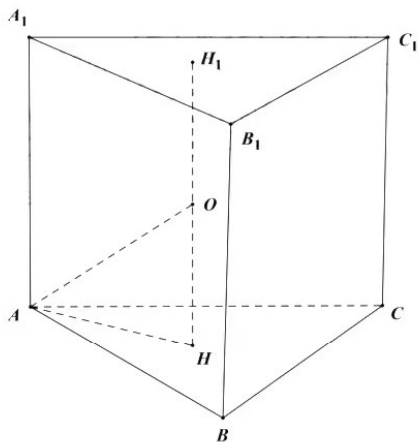
先取两底面三角形的外心 H 、 H_1 ，进而确定三棱柱的外接球的球心位置，再利用正弦定理

和直角三角形求外接球的半径，再利用球的体积公式求其体积.

分别取两底面三角形的外心 H 、 H_1 ，连接 HH_1 ，

取 HH_1 的中点 O ，连接 AH 、 OA ，

则 O 是三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球的球心， OA 是外接球的半径.



在 $\triangle ABC$ 中，利用正弦定理，

$$\text{得 } 2AH = \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}, \text{ 即 } AH = \sqrt{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOH \text{ 中, } OH = \frac{1}{2}HH_1 = \frac{1}{2}AA_1 = 1,$$

$$\text{则 } R = OA = \sqrt{1+2} = \sqrt{3},$$

所以外接球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi$.

故答案为: $4\sqrt{3}\pi$.

16. $[4, +\infty)$

可将已知不等式化为 $\left(3 - \frac{y}{x}\right)\left(\ln \frac{y}{x} + 2\right) \geq a$, 设 $t = \frac{y}{x} (t > 0)$, 令 $f(t) = (3-t)(\ln t + 2)$, 转为求函数 $f(t)$ 的最大值即可.

对任意正实数 x, y , 不等式 $(3x-y)(\ln y - \ln x + 2) \geq ax$ 恒成立, 即对任意正实数 x, y , 不等式

$\left(3 - \frac{y}{x}\right)\left(\ln \frac{y}{x} + 2\right) \geq a$ 恒成立. 设 $t = \frac{y}{x} (t > 0)$, 令 $f(t) = (3-t)(\ln t + 2)$,

$f'(t) = -(\ln t + 2) + \frac{3-t}{t} = -\ln t + \frac{3}{t} - 3$, 由 $y = -\ln t$ 和 $y = \frac{3}{t} - 3$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f'(t)$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $f'(1) = 0$, 当 $t > 1$ 时, $f'(t) < f'(1) = 0$, $0 < t < 1$ 时, $f'(t) > f'(1) = 0$,

所以 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(t)$ 在 $t=1$ 处取得极大值,

且为最大值 $f(1) = 4$, 则 $a \leq 4$, 即实数 a 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

故答案为: $[4, +\infty)$

17. (1) $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$, 相应的 x 的值为 $\frac{11}{12}\pi$; (2) $\tan 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(1) 根据数量积公式可得 $f(x) = 2\sin x \cos x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$, 令 $t = \sin x + \cos x (\frac{\pi}{4} < x < \pi)$, 根据辅助角公式将其化简变形可得 t 的范围. 由二次函数配方法可求得其最值.

(2) 根据 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, 由数量积公式可求得 $x - \alpha = \frac{\pi}{3}$ 且 $\sin(x + \alpha) + 2\sin 2\alpha = 0$, 从而可得 $\tan 2\alpha$ 的值.

解: (1) 因为 $\vec{b} = (\cos x, \sin x)$, $\vec{c} = (\sin x + 2\sin \alpha, \cos x + 2\cos \alpha)$ 且 $f(x) = \vec{b} \cdot \vec{c}$,

所以 $f(x) = \cos x \sin x + 2\sin \alpha \cos x + \sin x \cos x + 2\sin x \cos \alpha = 2\sin x \cos x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

令 $t = \sin x + \cos x (\frac{\pi}{4} < x < \pi)$, 因为 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 由

$\frac{\pi}{4} < x < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 1$, 则 $t \in (-1, \sqrt{2})$, 因为

$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$, 所以 $2\sin x \cos x = t^2 - 1$,

$\therefore y = t^2 + \sqrt{2}t - 1 = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$.

当 $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y_{\min} = -\frac{3}{2}$, 此时 $\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$,

$\because \frac{\pi}{4} < x < \pi$, $\therefore \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$, 得 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6}$, 即 $x = \frac{11\pi}{12}$.

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$, 相应的 x 的值为 $\frac{11}{12}\pi$.

(2) 由已知, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x = \cos(x - \alpha)$,

$\because 0 < \alpha < x < \pi$, $\therefore 0 < x - \alpha < \pi$, 所以 $x - \alpha = \frac{\pi}{3}$.

由 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 得 $\cos \alpha (\sin x + 2 \sin \alpha) + \sin \alpha (\cos x + 2 \cos \alpha) = 0$, 即

$\cos \alpha \sin x + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos x \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$, 即 $\cos \alpha \sin x + \cos x \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha = 0$, 即

$\sin(x + \alpha) + 2 \sin 2\alpha = 0$,

由 $x - \alpha = \frac{\pi}{3}$, 得 $x = \alpha + \frac{\pi}{3}$,

$\therefore \sin(2\alpha + \frac{\pi}{3}) + 2 \sin 2\alpha = 0$, 即 $\sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} + 2 \sin 2\alpha = 0$, 得 $\frac{5}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\alpha = 0$,

$\therefore \tan 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$;

18. (1) $a_n = 2n (n \in \mathbb{N}^*)$, $S_n = n^2 + n (n \in \mathbb{N}^*)$; (2) $T_n = \frac{n}{2n+1}$.

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 根据题中条件列出等式, 即可解出 a_1 和 d , 从而求出 $\{a_n\}$ 的通项公式和前 n 项和;

(2) 先求出 $\{b_n\}$ 的通项公式, 然后利用裂项相消法求和即可.

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则由 $\begin{cases} a_3 = 6 \\ a_5 + a_7 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 6 \\ 2a_1 + 10d = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases}$,

所以 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$, $S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n^2 + n$,

即 $a_n = 2n (n \in \mathbb{N}^*)$, $S_n = n^2 + n (n \in \mathbb{N}^*)$;

(2) 结合 (1) 可知 $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{n}{2n+1}.
 \end{aligned}$$

本题考查求等差数列的通项公式及其前 n 项和,考查裂项相消法求和,难度不大.利用裂项相消法求和时要注意是邻项相消还是隔项相消.

19. (1) 见解析 (2) 见解析

(1) 根据直三棱柱的性质得到 $AE \perp B_1B$, 根据等边三角形的性质得到 $AE \perp BC$, 再根据面面垂直的判定得到平面 $AEF \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

(2) 连接 BC_1 , 根据三角形中位线性质得到 $GH \parallel EF$, 从而得到 $GH \parallel$ 平面 AEF . 根据三棱柱的性质得到 $A_1G \parallel AE$, 从而得到 $A_1G \parallel$ 平面 AEF . 再根据面面平行的判定得到平面 $A_1GH \parallel$ 平面 AEF .

证明: (1) 因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 直三棱柱,

所以 $AE \perp B_1B$.

又 E 是正三角形 ABC 的边 BC 的中点,

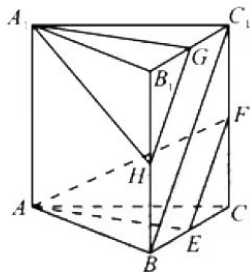
所以 $AE \perp BC$, $BB_1 \perp BC = B$

所以 $AE \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

而 $AE \subset$ 平面 AEF ,

所以平面 $AEF \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

(2) 连接 BC_1 ,



由于 E, F, G, H 分别是 BC, CC_1, B_1C_1, BB_1 的中点,

所以 $GH \parallel BC_1, EF \parallel BC_1$,

所以 $GH \parallel EF$,

而 $EF \subset$ 平面 $AEF, GH \not\subset$ 平面 AEF ,

所以 $GH \parallel$ 平面 AEF .

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1G \parallel AE$,

而 $AE \subset$ 平面 $AEF, A_1G \not\subset$ 平面 AEF ,

所以 $A_1G \parallel$ 平面 AEF .

又 $A_1G \cap GH = G$, 且 $GH, A_1G \subset$ 平面 A_1GHI ,

所以平面 $A_1GHI \parallel$ 平面 AEF .

本题第一问考查面面垂直的证明, 第二问考查面面平行的证明, 熟练掌握面面垂直和平行的判定定理是解题的关键, 属于中档题.

20. (1) 见解析; (2) 6

(1) 由散点图可以判断, $y = c + \frac{k}{x}$ 适宜作为 y 关于 x 的回归方程:

(2) 根据散点图可知 y 与 x 近似地呈反比例函数关系, 设 $y = c + \frac{k}{x}$, 令 $t = \frac{1}{x}$,

则 $y = c + kt$, 原数据变为:

t	4	2	1	0.5	0.25
y	16	12	5	2	1

由散点图可以看出 y 与 t 呈近似的线性相关关系.

$$\text{所以 } \bar{t} = 1.55, \bar{y} = 7.2, \quad \hat{b} = 4.1344 \approx 4, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} \approx 1,$$

$$\text{所以 } \hat{y} = 4t + 1.$$

$$\text{所以 } y \text{ 关于 } x \text{ 的回归方程是 } \hat{y} = \frac{4}{x} + 1.$$

(3) 由 (2) 得 $z = y + x = \frac{4}{x} + x + 1$.

易知在 $x \in [4, \infty)$ z 是关于 x 的单调递增函数所以最小值为 6.

点睛：本题主要考查了线性回归方程和散点图的问题，准确的计算是本题的关键，属于中档题。

$$21. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$$

化已知两圆方程为标准方程，求出圆心坐标与半径，画出图形，利用椭圆定义求得动圆的圆心 M 的轨迹方程。

$$C_1: (x+2)^2 + y^2 = 4, \quad C_2: (x-2)^2 + y^2 = 100,$$

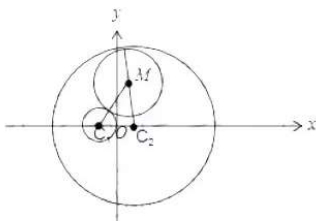
设动圆圆心 $M(x, y)$ ，半径为 r ，

$$\text{则} \begin{cases} |MC_1| = r + 2 \\ |MC_2| = 10 - r \end{cases} \Rightarrow |MC_1| + |MC_2| = 12 > |C_1C_2| = 4,$$

$\therefore M$ 是以 C_1 、 C_2 为焦点，长轴长为 12 的椭圆，

$$\therefore 2a = 12 \Rightarrow a^2 = 36, \quad b^2 = a^2 - c^2 = 32,$$

$$\therefore \text{所求轨迹方程为 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1.$$



本题考查轨迹方程的求法，考查圆与圆的位置关系，本质考查椭圆定义求方程，考查数形结合思想和运算求解能力。

$$22. (1) a = 1;$$

$$(2) \text{曲线 } y = f(x) \text{ 与直线 } y = 2x - 3 \text{ 仅有一个公共点, 公共点为 } (1, -1).$$

(1) 求出切线的斜率 $f'(1) = 2$, 则易得切线方程;

(2) 由题意, 令 $g(x) = \ln x - \frac{1}{x} - 2x + 3$, 求导并判断函数的单调性, 判断函数的零点个数, 即可得出结论.

$$(1) \text{ 解: 函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } \{x | x > 0\}, f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y = 0$ 垂直, 直线 $x + 2y = 0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,

所以 $f'(1) = a + 1 = 2$, 解得 $a = 1$,

所以, a 的值为 1

(2) 解: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$.

令 $g(x) = \ln x - \frac{1}{x} - 2x + 3$, $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2 = -\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2}$.

所以, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减; 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增.

又因为 $g(1) = 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 恒负.

所以, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 2x - 3$ 仅有一个公共点, 公共点为 $(1, -1)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线