2023CEE-02
数学

重庆缙云教育联盟

2023年高考第二次诊断性检测

数学试卷

考生须知：

1. 答题前，考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座位号在答题卡上填写清楚；
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，在试卷上作答无效；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回；
4. 全卷共6页，满分150分，考试时间120分钟。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

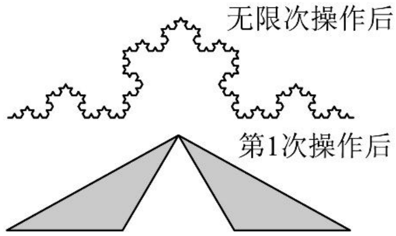
1．设A_1、A_2、A_3、…、A_7是均含有2个元素的集合，且$A_1 \cap A_7=\varnothing$，$A_i \cap A_{i+1}=\varnothing\left(i=1,2,3,\cdots,6\right)$，记$B=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_7$，则$B$中元素个数的最小值是（　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

2．任给$u \in[-2,0]$，对应关系f使方程$u^2+v=0$的解v与u对应，则$v=f(u)$是函数的一个充分条件是（　）

A．$v \in[-4,4]$　　B．$v \in(-4,2]$　　C．$v \in[-2,2]$　　D．$v \in[-4,-2]$

3．将一个顶角为120°的等腰三角形（含边界和内部）的底边三等分，挖去由两个等分点和上顶点构成的等边三角形，得到与原三角形相似的两个全等三角形，再对余下的所有三角形重复这一操作．如果这个操作过程无限继续下去…，最后挖剩下的就是一条“雪花”状的Koch曲线，如图所示已知最初等腰三角形的面积为1，则经过4次操作之后所得图形的面积是（　）



A．$\dfrac{16}{81}$　　B．$\dfrac{20}{81}$　　C．$\dfrac{8}{27}$　　D．$\dfrac{10}{27}$

4．设m，$n \in\{-2,-1,0,1,2,3\}$，曲线C：$mx^2+ny^2=1$，则下列说法正确的为（　）

A．曲线C表示双曲线的概率为$\dfrac{1}{5}$　　B．曲线C表示椭圆的概率为$\dfrac{1}{6}$

C．曲线C表示圆的概率为$\dfrac{1}{10}$　　D．曲线C表示两条直线的概率为$\dfrac{1}{5}$

5．数列$\{F_n\}$满足$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$，现求得$\{F_n\}$的通项公式为

$F_n=A\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，$A,B\in\mathbf{R}$，若$[x]$表示不超过$x$的最大整数，则$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8\right]$的值为（　）

A．43　　B．44　　C．45　　D．46

6．等额分付资本回收是指起初投资 P，在利率 i，回收周期数 n 为定值的情况下，每期期末取出的资金 A 为多少时，才能在第 n 期期末把全部本利取出，即全部本利回收，其计算公式为：$A=P\cdot\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$.某农业种植公司投资 33 万元购买一大型农机设备，期望投资收益年利率为 10%，若每年年底回笼资金 8.25 万元，则该公司将至少在（　）年内能全部收回本利和.（$\lg 11\approx1.04$，$\lg 5\approx0.70$，$\lg 3\approx0.48$）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

7. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60°，$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=2$，若对任意的x_1、$x_2\in(m,+\infty)$，且$x_1<x_2$，$\frac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}>|\vec{a}-2\vec{b}|$，则$m$的取值范围是（　）

A．$[e^3,+\infty)$　　B．$[e,+\infty)$　　C．$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D．$\left[\frac{1}{e},e\right)$

8．设实数$x>1,y\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数，若$ex\ln x+e^y<ye^y$，则（　）

A．$e^y\ln x>e$　　B．$e^y\ln x<e$　　C．$e^y>ex$　　D．$e^y<ex$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 2 分。

9．下列关于复数的四个命题正确的是（　）

A．若$|z|=2$，则$z\cdot\bar{z}=4$

B．若$z\left(2+i^7\right)=3+i$，则z的共轭复数的虚部为 1

C．若$|z+1-i|=1$，则$|z-1-i|$的最大值为 3

D．若复数z_1，z_2满足$|z_1|=2$，$|z_2|=2$，$z_1+z_2=1+\sqrt{3}i$，则$|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$

10．设$f(x)$是定义域为R的奇函数，且$y=f(2x+2\pi)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{2}$对称，若$0<x\le\pi$时，$f(x)=\left(e^x-e^{\pi-x}\right)\cos x$，则（　）

A．$f(x+\pi)$为偶函数

B．$f(x)$在$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减

C．$f(x)$在区间$[0,2023\pi]$上有 4046 个零点

D．$\sum_{k=1}^{2023} f(k\pi)=1-e^{\pi}$

11．“端午节”为中国国家法定节假日之一，已被列入世界非物质文化遗产名录，吃粽子便是端午节食俗之一．全国各地的粽子包法各有不同．如图，粽子可包成棱长为6cm的正四面体状的三角粽，也可做成底面半径为$\frac{3}{2}$cm，高为6cm（不含外壳）的圆柱状竹筒粽．现有两碗馅料，若一个碗的容积等于半径为6cm的半球的体积，则（　　）（参考数据：$\sqrt{2}\pi \approx 4.44$）

A．这两碗馅料最多可包三角粽 35 个　　　　B．这两碗馅料最多可包三角粽 36 个

C．这两碗馅料最多可包竹筒粽 21 个　　　　D．这两碗馅料最多可包竹筒粽 20 个

12．设$x\in \mathbf{R}$，当$n-\frac{1}{2}\le x<n+\frac{1}{2}(n\in \mathrm{Z})$时，规定$\langle x\rangle =n$，如$\langle 1.2\rangle =1$，$\langle -4.5\rangle =-4$．则（　　）

A．$\langle a+b\rangle \le \langle a\rangle +\langle b\rangle (a,b\in \mathrm{R})$

B．$\left\langle \sqrt{n^2+n}\right\rangle =n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$

C．设函数$y=\langle \sin x\rangle +\langle \cos x\rangle$的值域为$M$，则$M$的子集个数为32

D．$\left\langle x-\frac{1}{2}\right\rangle +\left\langle x-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right\rangle +\left\langle x-\frac{1}{2}+\frac{2}{n}\right\rangle +\cdots +\left\langle x-\frac{1}{2}+\frac{n-1}{n}\right\rangle =\left\langle nx-\frac{1}{2}\right\rangle \left(n\in \mathrm{N}^*\right)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．用 0~9 十个数字排成三位数，允许数字重复，把个位、十位、百位的数字之和等于 9 的三位数称为“长久数”，则“长久数”一共有__________个．

14．椭圆是特别重要的一类圆锥曲线，是平面解析几何的核心，它集中地体现了解析几何的基本思想.而黄金椭圆是一条优美曲线，生活中许多椭圆形的物品，都是黄金椭圆，它完美绝伦，深受人们的喜爱.黄金椭圆具有以下性质：①以长轴与短轴的四个顶点构成的菱形内切圆经过两个焦点，②长轴长，短轴长，焦距依次组成等比数列.根据以上信息，黄金椭圆的离心率为___________.

15．已知对任意的实数a均有$3f(\sin a)-4f(\cos a)=\sin^2 a\cos^2 a$成立，则函数$f(x)$的解析式为________.

16．将横坐标与纵坐标均为整数的点称为格点.已知$n\in \mathbf{N}$，将约束条件$\begin{cases} x\ge 0 \\ \frac{x}{2}+\frac{|y|}{3}\le n \end{cases}$表示的平面区域内格点的个数记作$S_n$，若$\lim\limits_{n\to \infty}\frac{S_n-an^2}{n}=b$，则$\frac{a}{b}=$___________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．王先生今年初向银行申请个人住房贷款 100 万元购买住房，月利率为0.3%，按复利计算，并从贷款后的次月初开始还贷，分 10 年还清.银行给王先生提供了两种还贷方式：①等额本金：在还款期内把本金总额等分，每月偿还同等数额的本金和剩余本金在该月所产生的利息；②等额本息：在还款期内，每月偿还同等数额的贷款（包括本金和利息）.

(1)若王先生采取等额本金的还贷方式，已知第一个还贷月应还 15000 元，最后一个还贷月应还 6500 元，试计算王先生该笔贷款的总利息；

(2)若王先生采取等额本息的还贷方式.银行规定每月还贷额不得超过家庭月收入的一半，已知王先生家庭月收入为 23000 元，试判断王先生该笔贷款能否获批.（不考虑其他因素）参考数据$1.003^{119}\approx 1.428$，$1.003^{180}\approx 1.433$，$1.003^{121}\approx 1.437$

18．由mn个小正方形构成长方形网格有m行和n列.每次将一个小球放到一个小正方形内，放满为止，记为一轮.每次放白球的频率为p，放红球的概率为q，$p+q=1$.

(1)若$m=2$，$p=q=\frac{1}{2}$，记y表示 100 轮放球试验中“每一列至少一个红球”的轮数，统计数据如表：

n	1	2	3	4	5
y	76	56	42	30	26

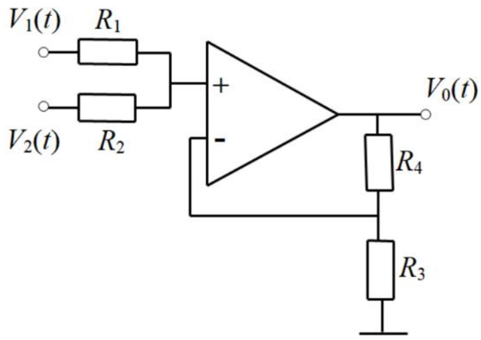
求y关于n的回归方程$\ln\hat{y}=\hat{b}n+\hat{a}$，并预测$n=10$时，$y$的值；（精确到 1）

(2)若$m=2$，$n=2$，$p=\frac{1}{3}$，$q=\frac{2}{3}$，记在每列都有白球的条件下，含红球的行数为随机变量X，求X的分布列和数学期望；

(3)求事件“不是每一列都至少一个红球”发生的概率，并证明：$\left(1-p^m\right)^n+\left(1-q^n\right)^m\geq 1$.

附：经验回归方程系数：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}x_iy_i-k\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{k}x_i^2-k\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，$\sum_{i=1}^{5}n_i\cdot\ln y_i=53$，$\overline{\ln y}=3.8$.

19．正弦信号是频率成分最为单一的信号，复杂的信号，例如电信号，都可以分解为许多频率不同、幅度不等的正弦型信号的叠加．正弦信号的波形可以用数学上的正弦型函数来描述：$V(t)=A\sin(2\pi ft+\varphi)$，其中$V(t)$表示正弦信号的瞬时大小电压 V（单位：V）是关于时间 t（单位：s）的函数，而 $A>0$ 表示正弦信号的幅度，f 是正弦信号的频率，相应的$T=\dfrac{1}{f}$为正弦信号的周期，φ为正弦信号的初相．由于正弦信号是一种最简单的信号，所以在电路系统设计中，科学家和工程师们经常以正弦信号作为信号源（输入信号）去研究整个电路的工作机理．如图是一种典型的加法器电路图，图中的三角形图标是一个运算放大器，电路中有四个电阻，电阻值分别为R_1，R_2，R_3，R_4（单位：Ω）．



$V_1(t)$和$V_2(t)$是两个输入信号，$V_0(t)$表示的是输出信号，根据加法器的工作原理，$V_0(t)$与$V_1(t)$和$V_2(t)$的关系为：$V_0(t)=\left(1+\dfrac{R_4}{R_3}\right)\cdot\dfrac{R_2\cdot V_1(t)+R_1\cdot V_2(t)}{R_1+R_2}$．

例如当$R_1=R_2=R_3=R_4=1\Omega$，输入信号$V_1(t)=\sin t$，$V_2(t)=\cos t$ 时，输出信号：

$V_0(t)=\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\cdot\dfrac{1\cdot\sin t+1\cdot\cos t}{1+1}=\sin t+\cos t$.

(1)若$R_1=R_2=R_3=R_4=1\Omega$，输入信号$V_1(t)=\sin t$，$V_2(t)=\cos t$，则$V_0(t)$的最大值为？

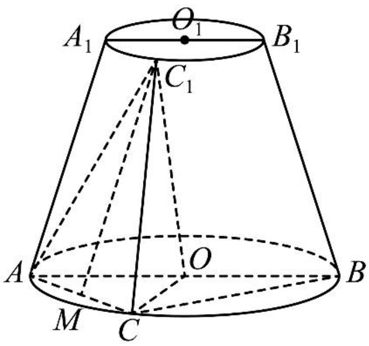
(2)已知$R_2=1\Omega$，$R_3=2\Omega$，$R_4=3\Omega$，输入信号$V_1(t)=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V_2(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)$．若$V_0(t)=A\sin\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)$（其中$A>0$），则$R_1=$？

(3)已知$R_3=1\Omega$，$R_4=1\Omega$，$0<R_2<R_1\le1\Omega$，且$V_1(t)=\sin t$，$V_2(t)=\cos 2t$．若$V_0(t)$的最大值为$\dfrac{3}{2}$，则满足条件的一组电阻值R_1，R_2分别是？

20．已知抛物线C：$y^2=4\sqrt{3}x$的焦点为F，准线与x轴交于点A．

(1)过点F的直线l交C于P,Q两点，且$|PQ|=8\sqrt{3}$，求直线l的方程；

(2)作直线AM,FM相交于点M，且直线AM的斜率与直线FM的斜率的差是$-\frac{1}{4}$，求点M的轨迹方程，并说明方程表示什么形状的曲线.



21．如图，在圆台OO_1中，A_1B_1,AB分别为上、下底面直径，且$A_1B_1//AB$，$AB=2A_1B_1$，　CC_1为异于AA_1,BB_1的一条母线．

(1)若M为AC的中点，证明：$C_1M//$平面ABB_1A_1；

(2)若$OO_1=3,AB=4,\angle ABC=30°$，求二面角$A-C_1C-O$的正弦值．

22．已知函数$f(x)=\ln(1+ax)-x-\frac{1}{a}$，$g(x)=x-e^x$．

(1)若不等式$f(x)\le\frac{1}{a}-2$恒成立，求a　的取值范围；

(2)若$a=1$时，存在4个不同实数x_1，x_2，x_3，x_4，满足$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=g\left(x_3\right)=g\left(x_4\right)$，证明：$|x_2-x_1|=|x_4-x_3|$．