

北师大附属实验中学 2019-2020 学年度第一学期

高三数学期中考试试卷

一、单项选择题

1. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$ ， $B = \{x | x^2 - 7x + 10 < 0\}$ ，则  $C_U(A \cap B) = ( \quad )$

A.  $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$     B.  $(-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$     C.  $(-\infty, 3] \cup [5, +\infty)$     D.  $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

2. 下列函数中，既是偶函数又存在零点的是 ( )

A.  $y = \cos x$     B.  $y = \sin x$     C.  $y = \ln x$     D.  $y = x^2 + 1$

3. 已知函数  $f(x)$  满足  $f(2) = 1$ ，设  $f(x_0) = y_0$ ，则“ $y_0 = 1$ ”是“ $x_0 = 2$ ”的 ( )

A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件

4. 要得到函数  $y = \log_2(2x + 4)$  的图象，只需将函数  $y = \log_2(x + 2)$  的图象 ( )

A. 向左平移 2 个单位长度    B. 向右平移 2 个单位长度  
C. 向上平移 1 个单位长度    D. 向下平移 1 个单位长度

5. 已知  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$  的前  $n$  项和，且  $S_5 > S_6 > S_4$ ，以下有四个命题：

① 数列  $\{S_n\}$  中的最大项为  $S_{10}$

② 数列  $\{a_n\}$  的公差  $d < 0$

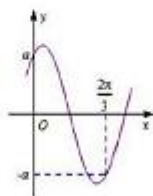
③  $S_{10} > 0$

④  $S_{11} < 0$

其中正确的序号是 ( )

A. ②③    B. ②③④    C. ②④    D. ①③④

6. 已知函数  $y = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega \in \mathbf{Z}^+, -\pi < \varphi < \pi)$  的部分图象如图所示，则  $\omega, \varphi$  的值分别是 ( )



A.  $3, \frac{\pi}{3}$     B.  $3, \frac{\pi}{6}$     C.  $2, \frac{\pi}{6}$     D.  $2, \frac{\pi}{3}$

7. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 6, & x \geq 0 \\ 3x + 4, & x < 0 \end{cases}$ , 若互不相等的实数  $x_1, x_2, x_3$  满足  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3$  的

取值范围是( )

- A.  $(\frac{11}{3}, 6)$       B.  $(\frac{11}{3}, 6]$       C.  $(\frac{20}{3}, \frac{26}{3})$       D.  $(\frac{20}{3}, \frac{26}{3}]$

8. 已知函数  $f(x) = e^x + ax - 2$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ . 若对于任意的  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 都有

$x_2 \cdot f(x_1) - x_1 \cdot f(x_2) < a(x_1 - x_2)$  成立, 则  $a$  的取值范围是( )

- A.  $[1, +\infty)$       B.  $[2, +\infty)$       C.  $(-\infty, 1]$       D.  $(-\infty, 2]$

## 二、填空题

9. 已知  $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ , 且  $\alpha$  是第二象限角, 则  $\sin 2\alpha =$  \_\_\_\_\_.

10. 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $S_1, 2S_2, 3S_3$  成等差数列, 则  $\{a_n\}$  的公比为 \_\_\_\_\_.

11. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对边的长分别为  $a, b, c$ . 若  $b + c = 2a$ , 则  $3\sin A = 5\sin B$ , 则  $\angle C =$  \_\_\_\_\_.

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0 \\ 4x - x^2, & x < 0 \end{cases}$ , 若  $f(2 - a^2) > f(a)$ , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

13. 函数  $f(x)$  满足下列性质:

① 定义域为  $\mathbf{R}$ , 值域为  $[1, +\infty)$ ;

② 图象关于  $x = 2$  对称;

③ 对任意  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ , 且  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ .

请写出函数  $f(x)$  的一个解析式 \_\_\_\_\_ (只要写出一个即可)

14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2}, & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \\ \ln(x+1), & x \in [-\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$ ,  $g(x) = x^2 - 4x - 4$ . 设  $b$  为实数, 若存在实数  $a$ , 使得

$f(a) + g(b) = 0$ . 则  $b$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.



三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = \sin x(\sqrt{3} \cos x - \sin x)$ .

- (1) 求  $f(x)$  的最小正周期;
- (2) 当  $x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$  时, 求  $f(x)$  的取值范围.

16. 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边, 且  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .

- (1) 求  $\angle A$  的大小;
- (2) 若  $\sin B + \sin C = 1$ ,  $b = 2$ , 试求  $\triangle ABC$  的面积.

17. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_n$  是  $S_n$  和 1 的等差中项, 等差数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = a_1$ ,  $b_4 = S_3$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $c_n = \frac{1}{b_n b_{n+1}}$ , 数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求证:  $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{1}{2}$ .

18. 已知函数  $f(x) = ax - 1 - \ln x, a \in \mathbf{R}$ .

- (1) 讨论函数  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 若函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极值, 对  $\forall x \in (0, +\infty)$ ,  $f(x) \geq bx - 2$  恒成立, 求实数  $b$  的取值范围.

19. 已知函数  $f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x$  的定义域为  $[-2, t]$ , 设  $f(-2) = m$ ,  $f(t) = n$ .

(1) 试确定  $t$  的取值范围, 使得函数  $f(x)$  在  $[-2, t]$  上为单调函数;

(2) 求证:  $m < n$ ;

(3) 求证: 对于任意的  $t > -2$ , 总存在  $x_0 \in (-2, t)$ , 满足  $\frac{f'(x_0)}{e^{x_0}} = \frac{2}{3}(t-1)^2$ , 又若方程  $\frac{f'(x_0)}{e^{x_0}} = \frac{2}{3}(t-1)^2$  在  $(-2, t)$  上有唯一解, 请确定  $t$  的取值范围.

20. 对于无穷数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ , 若  $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\} - \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), 则称  $\{b_n\}$  是  $\{a_n\}$  的

“收缩数列”. 其中,  $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  分别表示  $a_1, a_2, \dots, a_k$  中的最大数和最小数.

已知  $\{a_n\}$  为无穷数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 数列  $\{b_n\}$  是  $\{a_n\}$  的“收缩数列”.

(1) 若  $a_n = 2n + 1$ , 求  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和;

(2) 证明:  $\{b_n\}$  的“收缩数列”仍是  $\{b_n\}$ ;

(3) 若  $S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{n(n+1)}{2}a_1 + \frac{n(n-1)}{2}b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 求所有满足该条件的  $\{a_n\}$ .

自主招生在线创始于 2014 年, 致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号:

**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

**温馨提示：**

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得 <http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html>