2021学年高三上学期8月省实、广雅、执信、六中四校联考答案

数学

一、选择题（本大题12小题，每小题5分，共60分．其中第1题~第10题为单项选择题，在给出的四个选项中，只有一项符合要求；第11题和第12题为多项选择题，在给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得5分，选对但不全的得3分，有选错的得0分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	D	A	C	A	B	ABD	BD	ACD	AC

二、填空题（本大题4小题，每小题5分，共20分）

13. $2\sqrt{3}$　　14. 65　　15. -1　　16. 45，55287

三、解答题（本大题6小题，共70分）

17（1）可设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>1)$，$\because a_4=32,\therefore a_3+a_5=\dfrac{32}{q}+32q=80$．……2分

解得：$q=2$或$q=\dfrac{1}{2}$（舍去）．……4分

所以$a_n=a_4\cdot 2^{n-4}=2^{n+1}$．……5分

(2)$\because b_n=\log_2 a_n=n+1,\therefore c_1=b_1=2$ ……6分

当$n\geq 2$时，$c_1\cdot c_2\cdots\cdots c_n=n+1$①，$c_1\cdot c_2\cdots\cdots c_{n-1}=n$②，……7分

①/②得$c_n=\dfrac{n+1}{n}(n\geq 2)$，……8分

当$n=1$时，$c_1=\dfrac{2}{1}=2$也成立．$\therefore c_n=\dfrac{n+1}{n}$……9分

$\therefore \dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}=1$……10分

18(1)用X表示6例疑似病例中化验呈阳性的人数，则随机变量$X\sim B(6,\dfrac{1}{3})$……1分

由题意可知：$P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-C_6^0(\dfrac{2}{3})^6=\dfrac{665}{729}$．……3分

答：6例疑似病例中至少有1例呈阳性的概率为$\dfrac{665}{729}$．……4分

(2)方案二：混合一起检验，记检验次数为ξ，则$\xi=1,7$．……5分

$\therefore P(\xi=1)=t^2$，$P(\xi=7)=1-t^2$
$\therefore E(\xi)=t^2+7(1-t^2)=7-6t^2$ ……7分

方案三：每组的三个样本混合在一起化验，记检验次数为η，则$\eta=2,5,8$. ……8分

$\therefore P(\eta=2)=t^2$，$P(\eta=5)=2t(1-t), P(\eta=8)=(1-t)^2$

$\therefore E(\eta)=2t^2+10t(1-t)+8(1-t)^2=8-6t$ ……10分

$\because E(\eta)<E(\xi) \therefore 8-6t<7-6t^2 \therefore 6t^2-6t+1<1 \therefore \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<t<\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ ……12分

$\therefore t$的取值范围.$\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<t<\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$

19（1）$\because \angle D=2\angle B$， $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \cos D=\cos 2B=2\cos^2 B-1=\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}$， ……2 分

$\because$在$\triangle ACD$中， $AD=1$， $CD=3$， $\cos D=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$由余弦定理可得$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot \cos D=1+9-2\times 3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=12$， $\therefore$ $AC=2\sqrt{3}$， ……4 分

在$\triangle ABC$中， $BC=\sqrt{6}$， $AC=2\sqrt{3}$， $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$由余弦定理可得$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，即$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{AB^2+6-12}{2\cdot AB\times\sqrt{6}}$， ……5 分

化简得$AB^2-2\sqrt{2}AB-6=0$，解得$AB=3\sqrt{2}$．故AB的长为$3\sqrt{2}$． ……6 分

（2）设四边形$ABCD$面积为S，则$S=S_{\Delta BAC}+S_{\Delta DAC}$

$\because S_{\Delta DAC}=\dfrac{1}{2}\cdot DA\cdot DC\cdot\sin D=\dfrac{1}{2}\cdot DA\cdot DC\cdot\sqrt{1-\cos^2 D}=\sqrt{2}$， ……7 分

所以$S=S_{\Delta BAC}+\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin B+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}BA\cdot BC+\sqrt{2}$， ……8 分

在$\triangle ABC$中， $AC=2\sqrt{3}$， $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$由余弦定理可得：

$AB^2+BC^2-AC^2=2AB\cdot BC\cdot\cos B$， ……9 分

即$AB^2+BC^2-12=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}AB\cdot BC\geq 2AB\cdot BC-12$， ……10 分

$\therefore AB\cdot BC\leq\dfrac{12}{2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}=9+3\sqrt{3}$，

当且仅当$\therefore AB=BC=\sqrt{9+3\sqrt{3}}$时，$(S_{\Delta BAC})_{\max}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}\times(9+3\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$， ……11 分

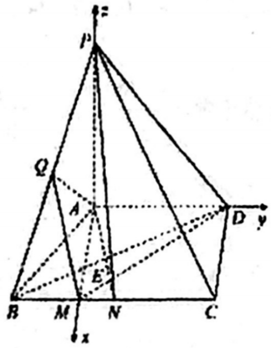
所以$S_{max}=\dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{2}$，……12 分

20（1）证明：$\because PA\perp$平面$ABCD, MD\subset$平面$ABCD$，$\therefore MD\perp PA$……1 分

$\because AD//BC, BC\perp CD, AD=2, BC=3, BM=1, MC=2=AD$，$\therefore$四边形$ADCM$为矩形……2 分

$\because \dfrac{AM}{AD}=\dfrac{MN}{AM}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle NAM=\angle MDA=\angle DMC$，$\therefore \angle DMC+\angle ANM=90^\circ$，$\therefore DM\perp AN$

……3分



$\because PA\cap AN=A, PA, AN\subset$平面$PAN$，$\therefore MD\perp$平面$PAN$

$\because PN\subset$平面PAN，$\therefore PN\perp MD$……4分

（第一问直接用向量法，也相应给分）

(2) 连接BD交AM于点E，连接QE.

$\because \Delta BME\sim\Delta DAE$，$\therefore \dfrac{BE}{ED}=\dfrac{ME}{EA}=\dfrac{1}{2}$

$\because PD//$平面$AQM, PD\subset$平面PBD，平面$AQM\cap$平面$PBD=QE$

$\therefore QE//PD$，$\therefore \dfrac{BQ}{BP}=\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{1}{3}$……6分

如图建立空间指角坐标系，则

$A(0,0,0), M(1,0,0), P(0,0,2), N(1,\frac{1}{2},0), B(1,-1,0), Q(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，$D(0,2,0)$……8分

由（1）知$MD\perp$平面PAN，则$\overrightarrow{MD}=(-1,2,0)$为平面$PAN$的一个法向量.……9分

$\because \overrightarrow{AM}=(1,0,0), \overrightarrow{AQ}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

设平面QAM的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0\end{cases}$，取$\vec{m}=(0,1,1)$……11分

设平面QAM与平面PAN所成锐二面角为θ，$\therefore \cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{MD}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{MD}|}=\dfrac{|0-2+0|}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$……12分

$\therefore$平面QAM与平面PAN所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

21（1）根据题意抛物线C的方程为$y^2=2px(p>0)$，

则$|MF|=n+\dfrac{p}{2}=2, 2pn=4$，……2 分，解得$p=2, n=1$，……3 分，

所以抛物线C的标准方程为$y^2=4x$.……4 分

(2) 由题意知，$F(1,0)$，直线 m 的斜率不为 0，可设直线 m 的方程为 $x=ty+1$，……5 分

联立方程得 $\begin{cases} y^2=4x \\ x=ty+1 \end{cases}$，消去 x 并化简得 $y^2-4ty-4=0$，……6 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$，则 $y_1+y_2=4t, y_1\cdot y_2=-4$.……7 分

因为 A,P 两点在抛物线 C 上，所以 $\begin{cases} y_1^2=4x_1 \\ y_0^2=4x_0 \end{cases}$，

所以 $k_1=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=\dfrac{4}{y_0+y_1}$，同理可得 $k_2=\dfrac{4}{y_0+y_2}$，……8 分，则

$$k_1+k_2=\frac{4}{y_1+y_0}+\frac{4}{y_2+y_0}=\frac{4(y_1+y_2+2y_0)}{(y_1+y_0)(y_2+y_0)}=\frac{4(y_1+y_2+2y_0)}{y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2}=\frac{4(4t+2y_0)}{-4+4ty_0+y_0^2}=2,$$
……9 分

所以 $8t+4y_0=-4+4ty_0+y_0^2$，即 $y_0^2+(4t-4)\ y_0-8t-4=0$ (*)……10 分

因为 $\Delta=(4t-4)^2+4(8t+4)=16(t^2+2)>0$，所以方程(*)有两个不同的解，……11 分

故满足 $k_1+k_2=2$ 的点 P 的个数为 2.……12 分

22 (1) $\because f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-2a+\dfrac{1}{x}$.……1 分

$\because$ 函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

$\therefore f'(x)=x+\dfrac{1}{x}-2a\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}-2a=2-2a\ge 0, \therefore a\le 1.$……3 分

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $a\le 1$.

(2) (i) $\because g(x)=x(\ln x+2-2ax)=0, \therefore \ln x+2-2ax=0(x>0)$ 的两个根为 x_1,x_2. ……4分

不妨设 $x_2>x_1>0$

$\therefore \begin{cases} \ln x_1+2=2ax_1 \\ \ln x_2+2=2ax_2 \end{cases} \therefore 2a(x_2-x_1)=\ln x_2-\ln x_1. \therefore a=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{2(x_2-x_1)}$ ……5 分

要证：$x_1+x_2>\dfrac{1}{a}$，

只需证 $x_1+x_2>\dfrac{2(x_2-x_1)}{\ln x_2-\ln x_1}\Leftrightarrow \ln x_2-\ln x_1>\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}\Leftrightarrow \ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$.……6分

令$t=\dfrac{x_2}{x_1}>1, F(x)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}.(t>1)$

$\therefore F'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$ 在$t\in(1,+\infty)$恒成立，$\therefore F(x)$在$t\in(1,+\infty)$为增函数，$\therefore F(x)>F(1)=0$

$\therefore x_1+x_2>\dfrac{1}{a}$. ……8分

（ii）$\because x_2-3x_1\geq 0, \therefore t=\dfrac{x_2}{x_1}\geq 3$，

$\because \begin{cases}\ln x_1+2=2ax_1\\ \ln x_2+2=2ax_2\end{cases} \therefore \ln x_2+\ln x_1+4=2a(x_2+x_1)$ ……9分

$\therefore \ln x_2+\ln x_1+4=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}(x_1+x_2), \therefore \ln(x_1x_2)+4=\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}+1}{\dfrac{x_2}{x_1}+1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}$

令$G(x)=\dfrac{(t+1)}{t-1}\ln t.(t\geq 3)$，$\therefore G'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}(t\geq 3)$ ……10分

令$h(t)=t-\dfrac{1}{t}-\ln t(t\geq 3).\therefore h'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}\geq 0$

$\therefore h(x)$在$t\in(1,+\infty)$为增函数，$\therefore h(x)\geq h(3)>h(1)=0$，$\therefore G'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}>0$

$\therefore G(x)$在$t\in[3,+\infty)$为增函数，$\therefore G(x)\geq G(3)=2\ln 3=\ln 9.$ ……11分

$\therefore \ln x_2+\ln x_1+4\geq \ln 9, \therefore \ln(x_1\cdot x_2)\geq \ln\dfrac{9}{e^4}, \therefore x_1\cdot x_2\geq \dfrac{9}{e^4}$

$\therefore x_1+x_2>2\sqrt{x_1\cdot x_2}=2\sqrt{\dfrac{9}{e^4}}=\dfrac{6}{e^2}$

$\therefore x_1+x_2>\dfrac{6}{e^2}$. ……12分