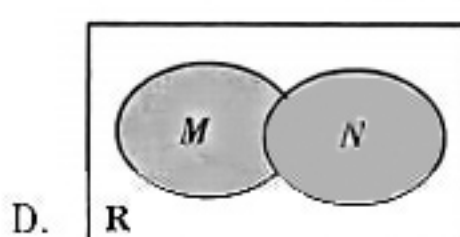
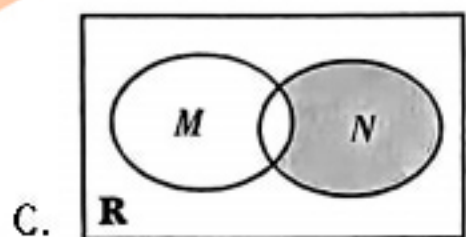
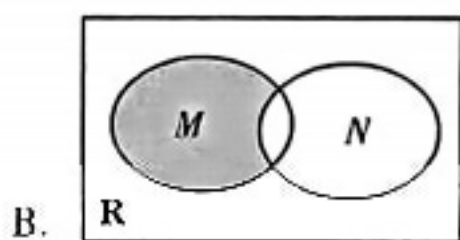
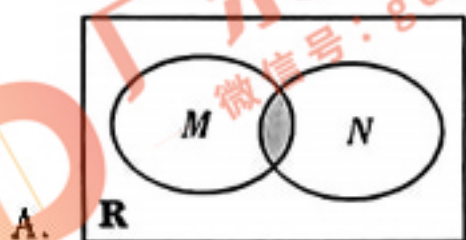


一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x(x-2) < 0\}$, $N = \{x | x-1 < 0\}$, 则下列 Venn 图中阴影部分可以表示集合 $\{x | 1 \leq x < 2\}$ 的是



2. 已知一个圆锥和圆柱的底面半径和高分别相等，若圆锥的轴截面是等边三角形，则这个圆锥和圆柱的侧面积之比为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\sqrt{3}$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0, \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(a) < f(6-a)$, 则实数 a 的取值范围是

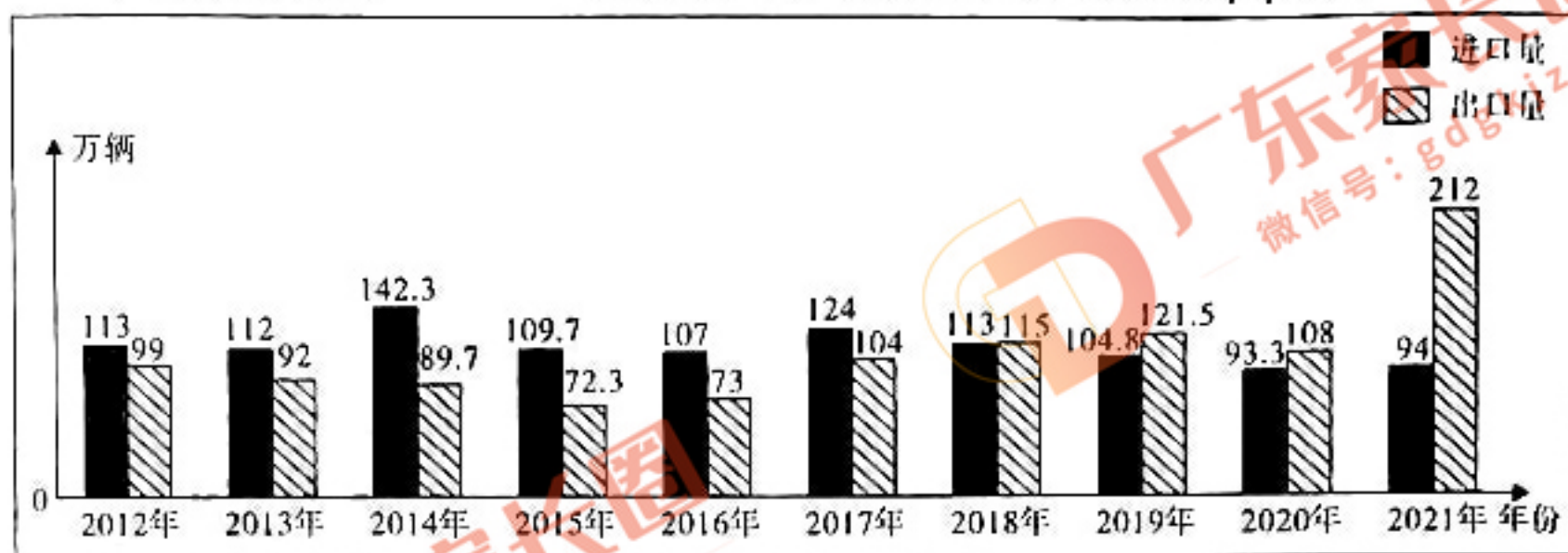
A. $(-3, +\infty)$

B. $(-\infty, -3)$

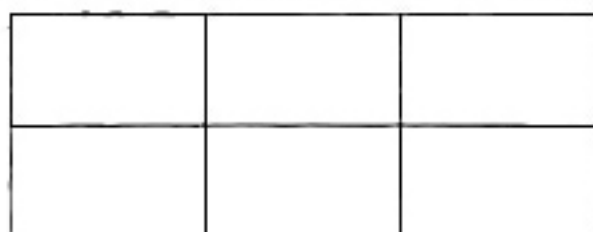
C. $(3, +\infty)$

D. $(-\infty, 3)$

4. 如图所示是中国 2012—2021 年汽车进、出口量统计图，则下列结论错误的是



- A. 2012—2021 年中国汽车进口量和出口量都是有增有减的
 B. 从 2018 年开始，中国汽车的出口量大于进口量
 C. 2012—2021 年中国汽车出口量的第 60 百分位数是 106 万辆
 D. 2012—2021 年中国汽车进口量的方差大于出口量的方差
5. 在复平面内，已知复数 z 满足 $|z-1| = |z+i|$ (i 为虚数单位)，记 $z_0 = 2+i$ 对应的点为点 Z_0 ， z 对应的点为点 Z ，则点 Z_0 与点 Z 之间距离的最小值为
6. 如图，在两行三列的网格中放入标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 的六张卡片，每格只放一张卡片，则“只有中间一列两个数字之和为 5”的不同的排法有



- A. 96 种 B. 64 种 C. 32 种 D. 16 种
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，点 B 的坐标为 $(0, b)$ ，若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \geq b$ ，则 C 的离心率取值范围是
8. 水平桌面上放置了 4 个半径为 2 的小球，4 个小球的球心构成正方形，且相邻的两个小球相切. 若用一个半球形的容器罩住四个小球，则半球形容器内壁的半径的最小值为
- A. 4 B. $2\sqrt{2}+2$ C. $2\sqrt{3}+2$ D. 6

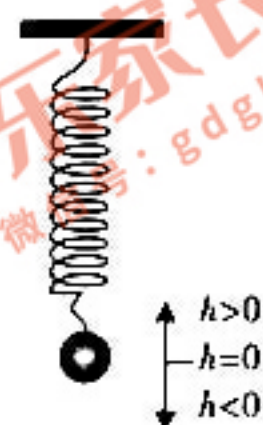
二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 如图，弹簧下端悬挂着的小球做上下运动(忽略小球的大小)，它在

$t(s)$ 时刻相对于平衡位置的高度 $h(\text{cm})$ 可以由 $h = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ 确

定，则下列说法正确的是

- A. 小球运动的最高点与最低点的距离为2 cm
- B. 小球经过4 s 往复运动一次
- C. $t \in (3, 5)$ 时小球是自发下往上运动
- D. 当 $t = 6.5$ 时，小球到达最低点



10. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中， $SD \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 是正方形，若 $SD = AD$ ，则

- A. $AC \perp SD$
- B. AC 与 SB 所成角为 60°
- C. BD 与平面 SCD 所成角为 45°
- D. BD 与平面 SAB 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 已知抛物线 $E: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，点 F 与点 C 关于原点对称，过点 C 的直线 l 与抛物线 E 交于 A, B 两点(点 A 和点 C 在点 B 的两侧)，则下列命题正确的是

- A. 若 BF 为 $\triangle ACF$ 的中线，则 $|AF| = 2|BF|$
- B. 若 BF 为 $\angle AFC$ 的角平分线，则 $|AF| = 6$
- C. 存在直线 l ，使得 $|AC| = \sqrt{2}|AF|$
- D. 对于任意直线 l ，都有 $|AF| + |BF| > 2|CF|$

12. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ，对于给定集合 A ，若 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，当 $x_1 - x_2 \in A$ 时都有 $f(x_1) - f(x_2) \in A$ ，则称 $f(x)$ 是“ A 封闭”函数. 则下列命题正确的是

- A. $f(x) = x^2$ 是“ $[-1, 1]$ 封闭”函数
- B. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 都是“ $\{0\}$ 封闭”函数
- C. 若 $f(x)$ 是“ $\{1\}$ 封闭”函数，则 $f(x)$ 一定是“ $\{k\}$ 封闭”函数($k \in \mathbf{N}^*$)
- D. 若 $f(x)$ 是“ $[a, b]$ 封闭”函数($a, b \in \mathbf{N}^*$)，则 $f(x)$ 不一定是“ $\{ab\}$ 封闭”函数

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。请把答案填在答题卡的相应位置上。

13. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2, |b| = 4, (b - a) \cdot a = 0$ ，则 a 与 b 的夹角为_____.

14. 在平面直角坐标系中，等边三角形 ABC 的边 AB 所在直线斜率为 $2\sqrt{3}$ ，则边 AC 所在直线斜率的一个可能值为_____.

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减， $f(x+2)$ 为偶函数，若 $f(x) = m$ 在 $[0, 12]$ 上恰好有4个不同的实数根 x_1, x_2, x_3, x_4 ，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ _____.

16. 已知动圆 N 经过点 $A(-6, 0)$ 及原点 O , 点 P 是圆 N 与圆 $M: x^2 + (y-4)^2 = 4$ 的一个公共点, 则当 $\angle OPA$ 最小时, 圆 N 的半径为_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 2\sin A \sin B$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 $\sin A + \sin B + \sin C$ 的取值范围.

18. (12 分)

已知各项都是正数的数列 $\{a_n\}$, 前 n 项和 S_n 满足 $a_n^2 = 2S_n - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

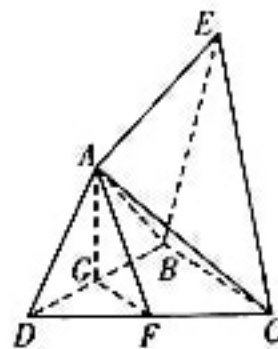
(2) 记 P_n 是数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和, Q_n 是数列 $\left\{\frac{1}{a_{2^n-1}}\right\}$ 的前 n 项和. 当 $n \geq 2$ 时, 试比较 P_n 与 Q_n 的大小.

19. (12分)

如图所示的在多面体中, $AB = AD$, $EB = EC$, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 平面 $BCE \perp$ 平面 BCD , 点 F, G 分别是 CD, BD 中点.

(1) 证明: 平面 $AFG \parallel$ 平面 BCE ;

(2) 若 $BC \perp BD$, $BC = BD = 2$, $AB = \sqrt{2}$, $BE = \sqrt{5}$, 求平面 AFG 和平面 ACE 夹角的余弦值.



20. (12分)

某商场为了回馈广大顾客, 设计了一个抽奖活动, 在抽奖箱中放 10 个大小相同的小球, 其中 5 个为红色, 5 个为白色. 抽奖方式为: 每名顾客进行两次抽奖, 每次抽奖从抽奖箱中一次性摸出两个小球. 如果每次抽奖摸出的两个小球颜色相同即为中奖, 两个小球颜色不同即为不中奖.

(1) 若规定第一次抽奖后将球放回抽奖箱, 再进行第二次抽奖, 求中奖次数 X 的分布列和数学期望.

(2) 若规定第一次抽奖后不将球放回抽奖箱, 直接进行第二次抽奖, 求中奖次数 Y 的分布列和数学期望.

(3) 如果你是商场老板, 如何在上述两种抽奖方式中进行选择? 请写出你的选择及简要理由.

21. (12分)

已知点 A , 点 B 和点 C 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上不同的三个点. 当点 A ,

点 B 和点 C 为椭圆的顶点时, $\triangle ABC$ 恰好是边长为 2 的等边三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若 O 为原点, 且满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = xe^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq (a+1)x + \ln x + 2$, 求实数 a 的取值范围.