



绝密★启用前

2021年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

# 文科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ ,  $B = \{x | \log_2 x < 2\}$ , 则  $A \cap B =$

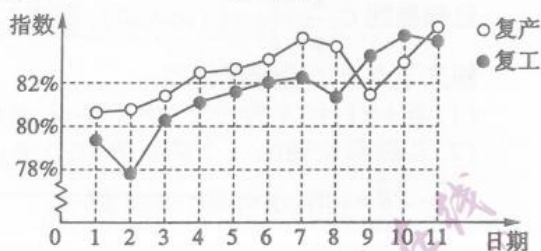
- A.  $\{2, 4\}$       B.  $\{1, 2\}$       C.  $\{0, 1, 2\}$       D.  $\{-1, -2, 1, 2\}$

2. 已知复数  $z$  满足  $z(1+i) = |2+2i|$  (其中  $i$  为虚数单位), 则复数  $z$  的虚部为

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $-\sqrt{2}$       C.  $\sqrt{2}i$       D.  $-\sqrt{2}i$

3. 我国新冠肺炎疫情防控进入常态化, 各地有序推进复工复产, 如图是某地连续 11 天复工复产指数折线图, 下列说法正确的是

- A. 这 11 天复工指数和复产指数均逐日增加  
 B. 这 11 天复产指数增量大于复工指数增量  
 C. 第 3 天至第 11 天复工复产指数均超过 80%  
 D. 第 9 天至第 11 天复产指数增量小于复工指数增量



4. 命题  $p: \forall x \geq 0, 2^x - \sin x \geq 0$  的否定为

- A.  $\forall x \geq 0, 2^x - \sin x < 0$       B.  $\forall x < 0, 2^x - \sin x < 0$   
 C.  $\exists x_0 \geq 0, 2^{x_0} - \sin x_0 < 0$       D.  $\exists x_0 < 0, 2^{x_0} - \sin x_0 < 0$

5. 若非零向量  $a, b$  满足  $|a| = 3|b|, (2a+3b) \perp b$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{3}$   
 C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

6. 攒尖是古代中国建筑中屋顶的一种结构形式. 宋代称为撮尖, 清代称为攒尖. 依其平面有圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、六角攒尖等, 也有单檐和重檐之分, 多见于亭阁式建筑. 如图所示, 某园林建筑屋顶为六角攒尖, 它的主轮廓可近似看作一个正六棱锥 (底面为正六边形, 从顶点到底面作垂线, 垂足是底面中心). 若正六棱锥的侧棱与高线所成的角为  $\alpha$ , 则其外接球半径与侧棱长的比值为

- A.  $\frac{1}{2\cos\alpha}$       B.  $\frac{1}{2\sin\alpha}$       C.  $2\sin\alpha$       D.  $2\cos\alpha$



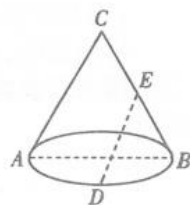


7. 已知函数  $f(x) = x(x+2) - m \ln x$  的图象在点  $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$  处的切线与直线  $x+2y=0$  垂直, 则  $m$  的值为
- A.  $\frac{5}{2}$       B.  $\frac{5}{4}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{7}{4}$
8. 若实数  $x, y, z$  满足  $\log_2 x = \log_3 y = 4^z$ , 则
- A.  $x < y < z$       B.  $y < z < x$       C.  $z < x < y$       D.  $y < x < z$
9. 已知曲线  $C_1: y = \sin x$ , 曲线  $C_2: y = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ , 则下列结论正确的是
- A. 将曲线  $C_1$  上各点的横坐标变为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 得到曲线  $C_2$
- B. 将曲线  $C_1$  上各点的横坐标变为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位, 得到曲线  $C_2$
- C. 将曲线  $C_1$  上各点的横坐标变为原来的  $\frac{1}{2}$ , 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 得到曲线  $C_2$
- D. 将曲线  $C_1$  上各点的横坐标变为原来的  $\frac{1}{2}$ , 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位, 得到曲线  $C_2$
10. 两枚相同的正方体骰子, 六个面分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 同时掷两枚骰子, 则两枚骰子朝上面的数字之积能被 6 整除的概率为
- A.  $\frac{11}{36}$       B.  $\frac{5}{18}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{5}{12}$
11. 已知点  $P$  为抛物线  $x^2 = 4y$  上任一点, 点  $A$  是圆  $x^2 + (y-6)^2 = 5$  上任一点, 则  $|PA|$  的最小值为
- A.  $6 - \sqrt{5}$       B.  $\sqrt{5}$       C.  $2\sqrt{5}$       D.  $3\sqrt{5}$
12. 方程  $(\frac{x^3+x}{2})^3 + \frac{x^3+x}{2} = 2x$  的所有实数根的和为
- A. 2      B. 0      C. 1      D. 4

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知  $\begin{cases} x+y-2 \leq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ 2x-y+2 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = x-2y$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

14. 如图, 圆锥的轴截面  $ABC$  为正三角形, 其面积为  $4\sqrt{3}$ ,  $D$  为弧  $AB$  的中点,  $E$  为母线  $BC$  的中点, 则异面直线  $AC, DE$  所成角的余弦值为 \_\_\_\_\_.



15. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在双曲线上. 若  $\triangle PF_1F_2$  为直角三角形, 且  $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{5}{12}$ , 则双曲线的离心率为 \_\_\_\_\_.

16. 已知点  $O$  是  $\triangle ABC$  内一点,  $AB=3, AC=4, \angle BAO = \angle CAO = \angle OBC = \angle OCA$ , 则  $BC =$  \_\_\_\_\_.





三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = \lambda \cdot 2^n + \mu(n-1)^2 - 2$ .

(1)若  $\lambda = \mu = 1$ ,求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

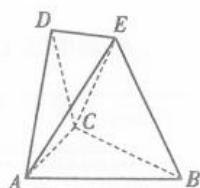
(2)是否存在实数  $\lambda, \mu$ ,使得数列  $\{a_n\}$  是等差数列,若存在,求出  $\lambda, \mu$  的值;若不存在,说明理由.

18. (12 分)

在如图所示的空间几何体中,平面  $ACD \perp$  平面  $ABC$ ,  $\triangle ACD$  与  $\triangle ACB$  均是等边三角形,  $AC = BE = 4$ ,  $BE$  和平面  $ABC$  所成的角为  $60^\circ$ ,且点  $E$  在平面  $ABC$  上的射影落在  $\angle ABC$  的平分线上.

(1)求证:  $DE \perp$  平面  $ADC$ ;

(2)求多面体  $DE-ABC$  的体积.



19. (12 分)

直播带货是扶贫助农的一种新模式,这种模式是利用主流媒体的公信力,聚合销售主播的力量助力打通农产品产销链条,切实助力贫困地区农民脱贫增收.某贫困地区有统计数据显示,2020 年该地利用网络直播形式销售农产品的销售主播年龄等级分布如图 1 所示,一周内使用直播销售的频率分布扇形图如图 2 所示.若将销售主播按照年龄分为“年轻人”(20 岁~39 岁)和“非年轻人”(19 岁及以下或者 40 岁及以上)两类,将一周内使用的次数为 6 次或 6 次以上的称为“经常使用直播销售用户”,使用次数为 5 次或不足 5 次的称为“不常使用直播销售用户”,则“经常使用直播销售用户”中有  $\frac{5}{6}$  是“年轻人”.

直播销售主播年龄等级分布

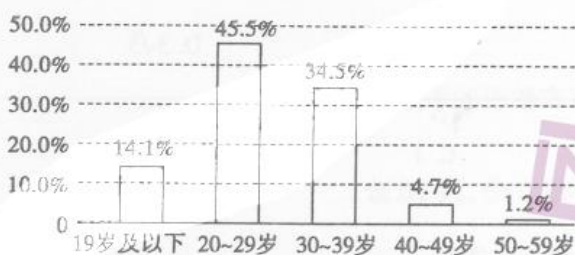


图 1

直播销售使用频率分布



图 2

(1)现对该地相关居民进行“经常使用网络直播销售与年龄关系”的调查,采用随机抽样的方法,抽取一个容量为 200 的样本,请你根据图表中的数据,完成  $2 \times 2$  列联表,并根据列联表判断是否有 85% 的把握认为经常使用网络直播销售与年龄有关?

使用直播销售情况与年龄列联表

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用直播销售用户			
不常使用直播销售用户			
合计			



(2)从经常使用直播销售和不常使用直播销售的居民中,按分层抽样的方式抽取样本容量为5的样本,从这5名居民中随机抽取3人,求至少有2人是经常使用直播销售的居民的概率.

参考数据:独立性检验临界值表

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.050	0.025	0.010
$k_0$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中,  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,  $n = a+b+c+d$ .

20. (12分)

已知函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} - (a+1)x$  ( $a > 1$ ).

(1)若  $a = e$ , 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2)若函数  $f(x)$  的极大值点和极小值点分别为  $x_1, x_2$ , 试判断方程  $f(x_1) - f(x_2) = 4$  是否有解? 若有解, 求出相应的实数  $a$ ; 若无解, 请说明理由.

21. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 直线  $l: y = kx + a$ , 直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点, 与  $y$  轴交于点  $P, O$  为坐标原点.

(1)若  $k = 1$ , 且  $N$  为线段  $MP$  的中点, 求椭圆  $C$  的离心率;

(2)若椭圆长轴的一个端点为  $Q(2, 0)$ , 直线  $QM, QN$  与  $y$  轴分别交于  $A, B$  两点, 当  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 1$  时, 求椭圆  $C$  的方程.

(二)选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = -2 + t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t \in \mathbf{R}, t$  为参数,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ).

以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \sin \theta, \theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ .

(1)求半圆  $C$  的参数方程和直线  $l$  的直角坐标方程;

(2)直线  $l$  与  $x$  轴交于点  $A$ , 与  $y$  轴交于点  $B$ , 点  $D$  在半圆  $C$  上, 且直线  $CD$  的倾斜角是直线  $l$  倾斜角的2倍,  $\triangle ABD$  的面积为  $1 + \sqrt{3}$ , 求  $\alpha$  的值.

23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)

已知  $a, b, c$  是正实数, 且满足  $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1$ .

(1)是否存在满足已知条件的  $a, b$ , 使得  $ab = \frac{1}{2}$ , 试说明理由;

(2)求  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$  的最大值.



2021年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

文科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题(每小题5分,共60分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	C	C	C	A	C	C	D	D	B	A

二、填空题(每小题5分,共20分)

13. 8    14.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     15.  $\frac{13}{7}$ 或 $\frac{3}{2}$     16.  $2\sqrt{3}$

三、解答题

17. 解:

(1)  $\lambda = \mu = 1$  时,  $S_n = 2^n + (n-1)^2 - 2$ .

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n + (n-1)^2 - 2 - 2^{n-1} - (n-2)^2 + 2 = 2^{n-1} + 2n - 3$ , ..... 4分

当  $n = 1$  时,  $a_1 = S_1 = 0$  也符合上式,

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2^{n-1} + 2n - 3$ . ..... 5分

(2) 若存在符合条件的实数  $\lambda, \mu$ ,

由于  $S_1 = 2\lambda - 2, S_2 = 4\lambda + \mu - 2, S_3 = 8\lambda + 4\mu - 2, S_4 = 16\lambda + 9\mu - 2$ ,

$\therefore a_1 = S_1 = 2\lambda - 2, a_2 = S_2 - S_1 = 2\lambda + \mu, a_3 = S_3 - S_2 = 4\lambda + 3\mu, a_4 = S_4 - S_3 = 8\lambda + 5\mu$ ,

从而  $a_2 - a_1 = \mu + 2, a_3 - a_2 = 2\lambda + 2\mu, a_4 - a_3 = 4\lambda + 2\mu$ ,

由于数列  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\therefore \mu + 2 = 2\lambda + 2\mu = 4\lambda + 2\mu, \therefore \lambda = 0, \mu = 2$ . ..... 9分

当  $\lambda = 0, \mu = 2$  时,  $S_n = 2(n-1)^2 - 2 = 2n^2 - 4n$ ,

由此  $a_n = 4n - 6$ , 数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 符合题意. .... 11分

$\therefore$  存在实数  $\lambda = 0, \mu = 2$ , 使得数列  $\{a_n\}$  是等差数列. .... 12分

18. 证明:

(1) 取 AC 中点 O, 连接 BO, DO.

由题意, BO 为  $\angle ABC$  的平分线, 且  $BO \perp AC, DO \perp AC$ .

设点 F 是点 E 在平面 ABC 上的射影,

由已知得, 点 F 在 BO 上, 连接 EF, 则  $EF \perp$  平面 ABC.

$\therefore$  平面 ACD  $\perp$  平面 ABC, 平面 ACD  $\cap$  平面 ABC = AC,  $DO \subset$  平面 ACD,  $DO \perp AC$ ,

$\therefore DO \perp$  平面 ABC, 同理可得  $BO \perp$  平面 ADC, ..... 4分

又  $\because EF \perp$  平面 ABC,  $\therefore DO \parallel EF$ .

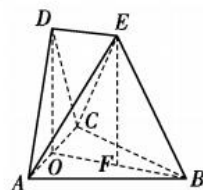
$\because BE$  和平面 ABC 所成的角为  $60^\circ$ , 即  $\angle EBF = 60^\circ, \therefore DO = EF = 2\sqrt{3}$ ,

$\therefore$  四边形 EFOD 为平行四边形,  $DE \parallel BO, \therefore DE \perp$  平面 ADC. .... 6分

(2)  $\because V_{DE-ABC} = V_{A-DEC} + V_{A-BCE}$ ,

$DE = OF = OB - BF = 2\sqrt{3} - 2$ ,

又  $DE \perp$  面 ADC,  $S_{\triangle ADC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 = 4\sqrt{3}$ , ..... 7分





$$\therefore V_{A-DEC} = V_{E-ADC} = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times (2\sqrt{3}-2) = 8 - \frac{8}{3}\sqrt{3}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$V_{A-BCE} = V_{E-ABC} = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 8, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\therefore V_{DE-ABC} = V_{A-DEC} + V_{A-BCE} = 16 - \frac{8}{3}\sqrt{3}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. 解:

(1) 由图 1, “年轻人”占比为 80%, “非年轻人”占比为 20%,

由图 2, “经常使用直播销售用户”占比为 60%, “不常使用直播销售用户”占比为 40%,

\therefore 补全的列联表如下:

	年轻人	非年轻人	合计
经常使用直播销售用户	100	20	120
不常使用直播销售用户	60	20	80
合计	160	40	200

于是  $a=100, b=20, c=60, d=20$ , \dots\dots\dots 3 分

$$\therefore K^2 = \frac{200 \times (100 \times 20 - 60 \times 20)^2}{120 \times 80 \times 160 \times 40} = \frac{25}{12} \approx 2.083 > 2.072,$$

即有 85% 的把握可以认为经常使用直播销售与年龄有关. \dots\dots\dots 6 分

(2) 从经常使用直播销售的居民中抽取 3 人, 不妨记作 A, B, C, 从不常使用直播销售的居民中抽取 2 人, 不妨记作 d, e.

则从这 5 人中抽取 3 人包含 (A, B, C) (A, B, d) (A, B, e) (A, C, d) (A, C, e) (A, d, e) (B, C, d) (B, C, e) (B, d, e) (C, d, e) 共 10 种情况. \dots\dots\dots 8 分

至少有 2 人是经常使用直播销售的居民包含 (A, B, C) (A, B, d) (A, B, e) (A, C, d) (A, C, e) (B, C, d) (B, C, e) 共 7 种情况. \dots\dots\dots 10 分

\therefore 从这 5 人中抽取 3 人至少有 2 人是经常使用直播销售的居民概率是  $P = \frac{7}{10}$ . \dots\dots\dots 12 分

20. 解:

$$(1) \text{由题意 } f'(x) = ae^x + e^{-x} - a - 1 = (e^x - 1)(a - e^{-x}) = ae^{-x}(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{a}\right), \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

$$\therefore a = e, \therefore f'(x) = e^{-x}(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{e}\right), \text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } x = -1, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

故  $x < -1$  或  $x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ , \dots\dots\dots 4 分

\therefore 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  和  $(0, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-1, 0)$  上单调递减. \dots\dots\dots 5 分

(2) \because  $a > 1$ , \therefore  $-\ln a < 0$ , 故  $x < -\ln a$  或  $x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $-\ln a < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,

$$\therefore x_1 = -\ln a, x_2 = 0, f(x_1) = 1 - a + (a+1)\ln a, f(x_2) = a - 1,$$

注意到  $f(x_1) - f(x_2) = 2 - 2a + (a+1)\ln a$ , \dots\dots\dots 8 分

$$\text{令 } g(x) = 2 - 2x + (x+1)\ln x (x > 1), \text{则 } g'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1,$$



令  $u(x) = g'(x)$ , 则  $u'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0$ ,  $\therefore$  函数  $u(x)$  在  $(1, +\infty)$  为增函数,

即  $g'(x) = u(x) > u(1) = 0$ ,  $\therefore g(x)$  在  $(1, +\infty)$  为增函数, ..... 10分

方程  $g(x) = 4$  在  $(1, +\infty)$  上至多有一个实数解,

又  $\because g(e^2) = 2 - 2e^2 + 2(e^2 + 1) = 4$ ,

$\therefore a = e^2$  为所求. .... 12分

21. 解:

(1) 由题意知直线  $l$  与  $x$  轴交于点  $(-a, 0)$ ,  $\therefore$  点  $M$  为椭圆  $C$  左顶点, 即  $M(-a, 0)$ ,

$\therefore$  设  $N\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ , 代入椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 得  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$ , ..... 3分

$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$ , 即椭圆  $C$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . .... 5分

(2) 由题意  $a = 2$ , 椭圆  $C: b^2(x^2 + 4) = 4b^2 (b > 0)$ ,

由  $\begin{cases} b^2x^2 + 4y^2 = 4b^2 \\ y = kx + 2 \end{cases}$ , 消  $y$  得  $(4k^2 + b^2)x^2 + 16kx + 16 - 4b^2 = 0$ ,

$\begin{cases} \Delta = 16b^2(4k^2 + b^2 - 4) > 0, \\ x_M + x_N = -\frac{16k}{4k^2 + b^2}, \\ x_M \cdot x_N = \frac{16 - 4b^2}{4k^2 + b^2}, \end{cases}$  ..... 7分

$\therefore$  直线  $QM: y = \frac{y_M}{x_M - 2}(x - 2)$ ,  $\therefore A\left(0, -\frac{2y_M}{x_M - 2}\right), \vec{PA} = \left(0, \frac{2y_M + 2x_M - 4}{2 - x_M}\right)$ ,

$\therefore y_M = kx_M + 2, \therefore y_M - 2 = kx_M$ ,

即  $\vec{PA} = \left(0, \frac{2(k+1)x_M}{2 - x_M}\right)$ , 同理  $\vec{PB} = \left(0, \frac{2(k+1)x_N}{2 - x_N}\right)$ , ..... 10分

$\therefore \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \frac{4(k+1)^2 x_M x_N}{x_M x_N - 2(x_M + x_N) + 4} = 4 - b^2 = 1, \therefore b^2 = 3$ ,

即椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . .... 12分

22. 解:

(1) 半圆  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = 1 + \sin\varphi \end{cases}$  (其中  $\varphi$  为参数,  $\varphi \in (0, \pi)$ ), ..... 3分

直线  $l$  的直角坐标方程为  $y = x \tan\alpha - 2, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . .... 5分

(2) 由题意可知,  $A\left(\frac{2}{\tan\alpha}, 0\right), B(0, -2), D(\cos 2\alpha, 1 + \sin 2\alpha)$ ,

点  $D$  到直线  $AB$  的距离为:

$d = \frac{|\tan\alpha \cdot \cos 2\alpha - (1 + \sin 2\alpha) - 2|}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = |\sin\alpha \cos 2\alpha - \cos\alpha \sin 2\alpha - 3\cos\alpha| = \sin\alpha + 3\cos\alpha$ , ..... 7分

$$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{2}{\tan\alpha}\right)^2} = \frac{2}{\sin\alpha}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\therefore \text{三角形 } ABD \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d = 1 + \frac{3}{\tan\alpha} = 1 + \sqrt{3}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\therefore \tan\alpha = \sqrt{3}, \text{ 又 } \because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

23. 解:

$$(1) \text{ 由条件 } 0 < a + \frac{b}{2} < 1, \text{ 从而 } ab = 2a \cdot \frac{b}{2} \leq 2 \left(\frac{a + \frac{b}{2}}{2}\right)^2 < 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{不存在满足已知条件的 } a, b, \text{ 使得 } ab = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

(2) 由柯西不等式可得:

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 &= \left(1 \cdot \sqrt{a} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{c}{3}}\right)^2 \\ &\leq [1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2] \cdot \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right) = 6, \dots\dots\dots 8 \text{分} \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{6}, \text{ 等号成立的条件为 } \frac{\sqrt{a}}{1} = \frac{\sqrt{\frac{b}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{c}{3}}}{\sqrt{3}}, \text{ 结合 } a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1,$$

$$\text{可知 } a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \text{ 的最大值为 } \sqrt{6}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$





## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（<http://www.zizzs.com/>）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》