理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\,|\,x^2-5x+6>0\}$，$B=\{x\,|\,x-1<0\}$，则 $A\cap B=$ 【A】

A. $(-\infty,1)$　B. $(-2,1)$　C. $(-3,-1)$　D. $(3,+\infty)$

2. 设 $z=-3+2i$，则在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于 【C】

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

3. 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3,t)$，$|\overrightarrow{BC}|=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ 【C】

A. -3　B. -2　C. 2　D. 3

4. 2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就. 实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系. 为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行. L_2 点是平衡点，位于地月连线的延长线上. 设地球质量为 M_1，月球质量为 M_2，地月距离为 R，L_2 点到月球的距离为 r，根据牛顿运动定律和万有引力定律，r 满足方程：$\dfrac{M_1}{(R+r)^2}+\dfrac{M_2}{r^2}=(R+r)\dfrac{M_1}{R^3}$.

设 $\alpha=\dfrac{r}{R}$. 由于 α 的值很小，因此在近似计算中 $\dfrac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$，则 r 的近似值为 【D】

A. $\sqrt{\dfrac{M_2}{M_1}}R$　B. $\sqrt{\dfrac{M_2}{2M_1}}R$　C. $\sqrt[3]{\dfrac{3M_2}{M_1}}R$　D. $\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}R$

5. 演讲比赛共有 9 位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，从 9 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 7 个有效评分. 7 个有效评分与 9 个原始评分相比，不变的数字特征是 【A】

A. 中位数　B. 平均数　C. 方差　D. 极差

6. 若 $a>b$，则 【C】

A. $\ln(a-b)>0$　B. $3^a<3^b$　C. $a^3-b^3>0$　D. $|a|>|b|$

7. 设 α，β 为两个平面，则 $\alpha /\!/ \beta$ 的充要条件是 【B】

A. α 内有无数条直线与 β 平行　B. α 内有两条相交直线与 β 平行

C. α，β 平行于同一条直线　D. α，β 垂直于同一平面

8. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点是椭圆 $\dfrac{x^2}{3p}+\dfrac{y^2}{p}=1$ 的一个焦点，则 $p=$ 【D】

A. 2　B. 3　C. 4　D. 8

9. 下列函数中，以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增的是 【A】

A. $f(x)=|\cos 2x|$　B. $f(x)=|\sin 2x|$　C. $f(x)=\cos|x|$　D. $f(x)=\sin|x|$

· 16 ·

10. 已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$ 【B】

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. 设 F 为双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P，Q 两点. 若 $|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为 【A】

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geqslant-\frac{8}{9}$，则 m 的取值范围是 【B】

A. $(-\infty,\frac{9}{4}]$　　B. $(-\infty,\frac{7}{3}]$　　C. $(-\infty,\frac{5}{2}]$　　D. $(-\infty,\frac{8}{3}]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 我国高铁发展迅速，技术先进. 经统计，在经停某站的高铁列车中，有10个车次的正点率为0.97，有20个车次的正点率为0.98，有10个车次的正点率为0.99，则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为<u>0.98</u>.

14. 已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=-e^{ax}$. 若 $f(\ln 2)=8$，则 $a=$<u>-3</u>.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 若 $b=6$，$a=2c$，$B=\frac{\pi}{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为<u>$6\sqrt{3}$</u>.

16. 中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为48的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为1. 则该半正多面体共有<u>26</u>个面，其棱长为<u>$\sqrt{2}-1$</u>.（本题第一空2分，第二空3分.）

图 1

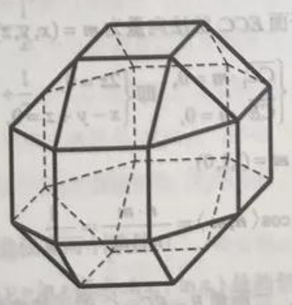


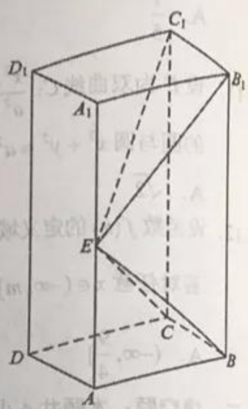
图 2

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在棱 AA_1 上，$BE\perp EC_1$.



（1）证明：$BE\perp$ 平面 EB_1C_1；

（2）若 $AE=A_1E$，求二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值.

解:（1）由已知得，$B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，$BE\subset$ 平面 ABB_1A_1，

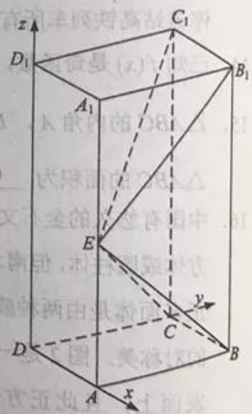
故 $B_1C_1\perp BE$.

又 $BE\perp EC_1$，所以 $BE\perp$ 平面 EB_1C_1.

（2）由（1）知 $\angle BEB_1=90^\circ$. 由题设知 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1E$，所以 $\angle AEB=45^\circ$，

故 $AE=AB$，$AA_1=2AB$.

以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{DA}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则



$C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C_1(0,1,2)$，$E(1,0,1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，

$\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$.

设平面 EBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x=0,\\ x-y+z=0,\end{cases}$$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(0,-1,-1)$.

设平面 ECC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}2z=0,\\ x-y+z=0,\end{cases}$$

所以可取 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$.

于是 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=-\dfrac{1}{2}$.

所以，二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

• 18 •

18.（12分）

11分制乒乓球比赛，每赢一球得1分，当某局打成10:10平后，每球交换发球权，先多得2分的一方获胜，该局比赛结束. 甲、乙两位同学进行单打比赛，假设甲发球时甲得分的概率为0.5，乙发球时甲得分的概率为0.4，各球的结果相互独立. 在某局双方10:10平后，甲先发球，两人又打了X个球该局比赛结束.

（1）求$P(X=2)$；

（2）求事件"$X=4$且甲获胜"的概率.

解：（1）$X=2$就是10:10平后，两人又打了2个球该局比赛结束，则这2个球均由甲得分，或者均由乙得分. 因此$P(X=2)=0.5\times0.4+(1-0.5)\times(1-0.4)=0.5$.

（2）$X=4$且甲获胜，就是10:10平后，两人又打了4个球该局比赛结束，且这4个球的得分情况为：前两球是甲、乙各得1分，后两球均为甲得分.

因此所求概率为

$$[0.5\times(1-0.4)+(1-0.5)\times0.4]\times0.5\times0.4=0.1.$$

19.（12分）

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

（1）证明：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

（2）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

解：（1）由题设得$4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，即$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$.

又因为$a_1+b_1=1$，所以$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

由题设得$4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，即$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$.

又因为$a_1-b_1=1$，所以$\{a_n-b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列.

（2）由（1）知，$a_n+b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$.

所以

$$a_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}.$$

20.（12分）

已知函数$f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$.

（1）讨论$f(x)$的单调性，并证明$f(x)$有且仅有两个零点；

（2）设x_0是$f(x)$的一个零点，证明曲线$y=\ln x$在点$A(x_0,\ln x_0)$处的切线也是曲线$y=e^x$的切线.

解：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$．

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 单调递增．

因为 $f(\mathrm{e})=1-\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}<0$，$f(\mathrm{e}^2)=2-\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}=\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有唯一零点 x_1，即 $f(x_1)=0$．又 $0<\dfrac{1}{x_1}<1$，$f(\dfrac{1}{x_1})=-\ln x_1+\dfrac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点 $\dfrac{1}{x_1}$．

综上，$f(x)$ 有且仅有两个零点．

（2）因为 $\dfrac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{-\ln x_0}$，故点 $B(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0})$ 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上．

由题设知 $f(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，故直线 AB 的斜率

$$k=\frac{\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\frac{\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}}{-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\frac{1}{x_0}.$$

曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $B(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0})$ 处切线的斜率是 $\dfrac{1}{x_0}$，曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处切线的斜率也是 $\dfrac{1}{x_0}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线．

21．（12 分）

已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$．记 M 的轨迹为曲线 C．

（1）求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线；

（2）过坐标原点的直线交 C 于 P，Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$ 轴，垂足为 E，连结 QE 并延长交 C 于点 G．

（i）证明：$\triangle PQG$ 是直角三角形；

（ii）求 $\triangle PQG$ 面积的最大值．

解：（1）由题设得 $\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$，化简得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\ (|x|\neq 2)$，所以 C 为中心在坐标原点，焦点在 x 轴上的椭圆，不含左右顶点．

（2）（i）设直线 PQ 的斜率为 k，则其方程为 $y=kx(k>0)$．

由 $\begin{cases} y=kx, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$．

记 $u=\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$，则 $P(u,uk)$，$Q(-u,-uk)$，$E(u,0)$．

于是直线 QG 的斜率为 $\dfrac{k}{2}$，方程为 $y=\dfrac{k}{2}(x-u)$．

由 $\begin{cases} y=\dfrac{k}{2}(x-u), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得

$$(2+k^2)x^2-2uk^2x+k^2u^2-8=0. \quad ①$$

设 $G(x_G,y_G)$，则 $-u$ 和 x_G 是方程①的解，故 $x_G=\dfrac{u(3k^2+2)}{2+k^2}$，由此得 $y_G=\dfrac{uk^3}{2+k^2}$．

从而直线 PG 的斜率为 $\dfrac{\dfrac{uk^3}{2+k^2}-uk}{\dfrac{u(3k^2+2)}{2+k^2}-u}=-\dfrac{1}{k}$．

所以 $PQ\perp PG$，即 $\triangle PQG$ 是直角三角形．

（ii）由（i）得 $|PQ|=2u\sqrt{1+k^2}$，$|PG|=\dfrac{2uk\sqrt{k^2+1}}{2+k^2}$，所以 $\triangle PQG$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|PQ||PG|=\frac{8k(1+k^2)}{(1+2k^2)(2+k^2)}=\frac{8(\frac{1}{k}+k)}{1+2(\frac{1}{k}+k)^2}.$$

设 $t=k+\dfrac{1}{k}$，则由 $k>0$ 得 $t\geqslant 2$，当且仅当 $k=1$ 时取等号．

因为 $S=\dfrac{8t}{1+2t^2}$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递减，所以当 $t=2$，即 $k=1$ 时，S 取得最大值，最大值为 $\dfrac{16}{9}$．

因此，$\triangle PQG$ 面积的最大值为 $\dfrac{16}{9}$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

在极坐标系中，O 为极点，点 $M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$ 在曲线 C：$\rho=4\sin\theta$ 上，直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直，垂足为 P．

（1）当$\theta_0=\frac{\pi}{3}$时，求ρ_0及l的极坐标方程；

（2）当M在C上运动且P在线段OM上时，求P点轨迹的极坐标方程.

解：（1）因为$M(\rho_0,\theta_0)$在C上，当$\theta_0=\frac{\pi}{3}$时，$\rho_0=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

由已知得 $|OP|=|OA|\cos\frac{\pi}{3}=2$.

设$Q(\rho,\theta)$为l上除P的任意一点．在$\mathrm{Rt}\triangle OPQ$中，$\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=|OP|=2$.

经检验，点$P(2,\frac{\pi}{3})$在曲线$\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=2$上.

所以，l的极坐标方程为$\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=2$.

（2）设$P(\rho,\theta)$，在$\mathrm{Rt}\triangle OAP$中，$|OP|=|OA|\cos\theta=4\cos\theta$，即$\rho=4\cos\theta$.

因为P在线段OM上，且$AP\perp OM$，故θ的取值范围是$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.

所以，P点轨迹的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$，$\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

已知$f(x)=|x-a|x+|x-2|(x-a)$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)<0$的解集；

（2）若$x\in(-\infty,1)$时，$f(x)<0$，求a的取值范围.

解：（1）当$a=1$时，$f(x)=|x-1|x+|x-2|(x-1)$.

当$x<1$时，$f(x)=-2(x-1)^2<0$；当$x\geqslant1$时，$f(x)\geqslant0$.

所以，不等式$f(x)<0$的解集为$(-\infty,1)$.

（2）因为$f(a)=0$，所以$a\geqslant1$.

当$a\geqslant1$，$x\in(-\infty,1)$时，$f(x)=(a-x)x+(2-x)(x-a)=2(a-x)(x-1)<0$.

所以，a的取值范围是$[1,+\infty)$.

·22·