广东省2021届普通高中学业质量联合测评

数学参考答案及评分细则

一、单项选择题

1. B 【解析】因为 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}=[-1,3]$，$B=\{x\mid 0\leqslant x<5\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$. 故选 B.

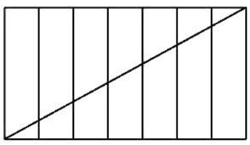
2. D 【解析】因为 $z_1=1+\mathrm{i}$，则 $z_2=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-2\mathrm{i}$. 所以 z_2 的虚部为 -2. 故选 D.

3. B 【解析】因为 α 是第二象限的角，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，则 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，$\tan 2\alpha=\dfrac{2\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{1-\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{24}{7}$. 故选 B.

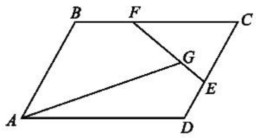
4. A 【解析】设公比为 q，由 $S_2=3$，$S_4=15$，得 $\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}=3$，$\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=15$，所以 $1+q^2=5$，得 $q=2$，所以 $a_1=1$，$a_5=a_1q^4=16$. 故选 A.

5. C 【解析】当甲排在第一位时，共有 $A_3^3A_2^2=12$ 种发言顺序，当甲排在第二位时，共有 $C_2^1A_2^2A_2^2=8$ 种发言顺序，所以一共有 $12+8=20$ 种不同的发言顺序. 故选 C.

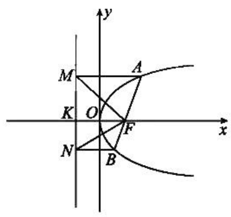
6. A 【解析】如图，一条直角边(即木棍的高)长 20 尺，另一条直角边长 $7\times 3=21$(尺)，因此葛藤长 $\sqrt{20^2+21^2}=29$(尺). 故选 A.



7. C 【解析】如图所示，因为 $\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FC}$，所以 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，又 $\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{GE}$，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AD}$. 故选 C.



8. D 【解析】如图所示，由题意得 l：$x=-\dfrac{p}{2}$，$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB：$x=my+\dfrac{p}{2}$，则 $M\left(-\dfrac{p}{2},y_1\right)$，$N\left(-\dfrac{p}{2},y_2\right)$，由 $\begin{cases}y^2=2px,\\ x=my+\dfrac{p}{2},\end{cases}$ 得 $y^2-2pmy-p^2=0$，所以 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，因为 $|MF|^2=p^2+y_1^2=16$，$|NF|^2=p^2+y_2^2=\dfrac{16}{3}$，所以 $p^4=(16-p^2)\left(\dfrac{16}{3}-p^2\right)$，解得 $p=2$，设抛物线准线 l 交 x 轴于 K，则 $KF=p=2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MFK$ 中，可得 $\cos\angle MFK=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$\angle MFK=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\triangle AMF$ 是等边三角形，所以 $m=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$y_1+y_2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$|AB|=x_1+x_2+p=m(y_1+y_2)+2p=\dfrac{16}{3}$. 故选 D.



二、多项选择题

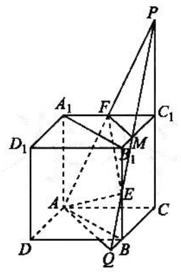
9. BC 【解析】因为 $a^{\frac{1}{2}}<b^{\frac{1}{2}}$，$b^{\frac{1}{2}}<b^{\frac{1}{3}}$，所以 $a^{\frac{1}{2}}<b^{\frac{1}{3}}$，故 A 错误；因为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a>\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^b>\left(\dfrac{1}{3}\right)^b$，所以

$\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{3}\right)^b$，故 B 正确；$\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{\frac{1}{3}}b$，C 正确；$\log_a\frac{1}{3}<\log_b\frac{1}{3}$，D 错误. 故选 BC.

10. ABC 【解析】对于 A，日成交量的中位数是 26，故 A 错误；对于 B，因为日平均成交量为 $\frac{8+13+16+26+32+38+166}{7}=\frac{299}{7}$，日成交量超过日平均成交量的只有 10 月 7 日 1 天，故 B 错误；对于 C，10 月 7 日认购量的增幅为 $\frac{276-112}{112}\approx146\%$，10 月 7 日成交量的增幅为 $\frac{166-38}{38}\approx337\%$，即 10 月 7 日认购量的增幅小于 10 月 7 日成交量的增幅. 故 C 错误；对于 D，因为日认购量的数据分布较分散些，方差大些，故 D 正确. 故选 ABC.

11. ABD 【解析】因为 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调，所以 $\frac{T}{2}>\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{12}$，因为 $f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=0$，$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-1$，所以 $\frac{T}{4}=\frac{2}{3}\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得 $\omega=2$，由 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-1$，得 $\frac{4}{3}\pi+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，令 $k=1$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $x=-\frac{7\pi}{12}$，得 $2x+\frac{\pi}{6}=-\pi$，故 A 项正确；令 $x=\frac{\pi}{6}$，得 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，故 B 项正确；当 $x\in\left[\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故 C 项错误；先将 $y=\sin x$ 的图象的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，然后向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，故 D 项正确. 故选 ABD.

12. CD 【解析】如图所示，将该三棱柱视为正方体 $ACBD-A_1C_1B_1D_1$ 的一部分，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的半径 $2R=6\sqrt{3}$，$R=3\sqrt{3}$，其表面积为 $4\pi R^2=108\pi$，故 A 项错误；延长 AF 与 CC_1 交于点 P，连接 PE 交 B_1C_1 于 M，连接 FM，则平面 $AEMF$ 即为截面 α. 因为 $FC_1/\!/AC$，F 是中点，所以 C_1 是 PC 的中点，由 $\triangle MPC_1$ 与 $\triangle MEB_1$ 相似，得 $\frac{PC_1}{EB_1}=\frac{MC_1}{MB_1}=2$，得 $B_1M=\frac{1}{3}B_1C_1$，而 E 是 BB_1 的中点，所以 ME 与 BC_1 不平行. 故 B 项错误；因为 $B_1M=2$，又 $B_1E=3$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1EM$ 中，$EM=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，故 C 项正确；延长 PE 交 BC 于点 Q，则 α 将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 分成体积较大部分的体积为 $V_{P-ACQ}-V_{P-FMC_1}-V_{A-QBE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times8\times12-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times6-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times6\times3=78$，所以剩余部分的体积为 $\frac{1}{2}\times6\times6\times6-78=30$，所以体积之比为 $\frac{78}{30}=\frac{13}{5}$，故 D 项正确. 故选 CD.



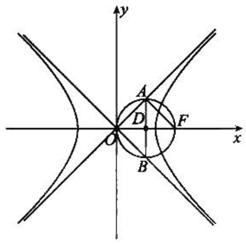
三、填空题

13. 9 【解析】因为 $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=1$，所以 $m+4n=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)(m+4n)=5+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\geqslant9$，当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{m}{n}$，即 $m=2n=3$ 时等号成立，所以 $m+4n$ 的最小值为 9.

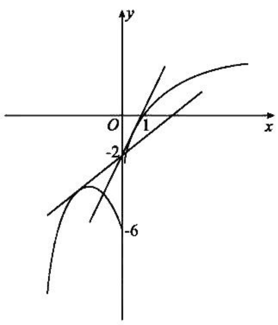
14. 1　15 【解析】令 $x=1$ 得，$2\times(a+1)^5=64$，解得 $a=1$，$(x+1)^5$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_5^rx^{5-r}$，分别取 $5-r=2$ 与 $5-r=4$，得 $r=3$，$r=1$，所以 $(x+1)^5$ 的展开式中含有 x^2 的项的系数为 C_5^3，含有 x^4 的项的系数为 C_5^1，所以展开式中 x^3 项的系数为 $C_5^3+C_5^1=15$.

15. $2\sqrt{2}$ 【解析】连接 AB 交 x 轴于 D，连接 AF，则 $OA\perp AF$，$|OA|=a$，$|AF|=b$，因为 $\mathrm{Rt}\triangle AOD\backsim\mathrm{Rt}\triangle FOA$，所以 $\frac{|OD|}{|OA|}=\frac{|AD|}{|AF|}=\frac{|OA|}{|OF|}$，即 $\frac{|OD|}{a}=$

$\frac{|AD|}{b}=\frac{a}{c}$，所以 $|OD|=\frac{a^2}{c}$，$|AD|=\frac{ab}{c}$，因为 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times|OD|\times2|AD|=\frac{a^3b}{c^2}=\frac{1}{8}ab$，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=8$，即 $e=2\sqrt{2}$.



16. (2，e)　【解析】若函数 $g(x)=f(x)-mx+2$ 有四个零点，需 $y=f(x)$ 和 $y=mx-2$ 有四个交点，作出函数 $f(x)=\ln x$ 和 $y=mx-2$ 的图象如下图所示，直线 $y=mx-2$ 恒过点 $(0,-2)$，设 $y=mx-2$ 与 $y=\ln x$ 相切于点 (x_0,y_0)，则 $y_0=mx_0-2$，$y_0=\ln x_0$，由 $y=\ln x$，得 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $\frac{1}{x_0}=m$，解得 $x_0=\frac{1}{e}$，$m=e$，即当 $0<m<e$ 时，函数 $f(x)=\ln x$ 和 $y=mx-2$ 有两个交点. 当 $x\leqslant0$ 时，若 $y=mx-2$ 与 $y=-x^2-2x-6$ 有两个交点，需 $mx=-x^2-2x-4$ $(x\leqslant0)$ 有两个不相等的实根，当 $x=0$ 时，m 无解；当 $x<0$ 时，$m+2=-x-\frac{4}{x}$，由对勾函数图象可得当 $m+2>4$，即 $m>2$ 时，$y=m+2$ 与 $y=-x-\frac{4}{x}$ 有两个交点，故 $y=mx-2$ 与 $y=-x^2-2x-6$ 有两个交点. 综上 $2<m<e$ 时，函数 $g(x)=f(x)-mx+2$ 有四个零点.



四、解答题

17. **解**：选择①

因为 $\cos A\cos B+\cos C=2\sin A\cos B$，

所以 $\cos A\cos B-\cos(A+B)=2\sin A\cos B$，

所以 $\cos A\cos B-\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=2\sin A\cos B$，

所以 $2\sin A\cos B=\sin A\sin B$，

又因为 $\sin A\neq0$，

所以 $\tan B=2$，　　(5 分)

所以 $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

因为 $a=2\sqrt{5}$，$b=2c$，

所以由余弦定理得 $(2c)^2=c^2+(2\sqrt{5})^2-2\times c\times2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}$，

解得 $c=2$，$b=4$，

所以$\triangle ABC$的面积为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=4$.　　(10 分)

选择②

因为 $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$，

所以由正弦定理可得 $\sin B\sin\frac{B+C}{2}=\sin A\sin B$，

因为 $\sin B\neq0$，

所以 $\sin\frac{B+C}{2}=\sin A$，

因为 $A+B+C=180^\circ$，

所以 $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$，

所以 $\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，

因为 $\cos\frac{A}{2}\neq0$，所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $A=60^\circ$.　　(5 分)

所以由余弦定理得 $(2\sqrt{5})^2=c^2+(2c)^2-2\times c\times2c\times\frac{1}{2}$，

解得 $c=\frac{2\sqrt{15}}{3}$，$b=\frac{4\sqrt{15}}{3}$，

所以$\triangle ABC$的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

(10 分)

选择③

由 $a\sin^2\frac{A+B}{2}+c\sin^2\frac{B+C}{2}=\frac{5}{4}b$ 及 $A+B+C=\pi$，得：

$a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{5}{4}b$，

即 $a\frac{1+\cos C}{2}+c\frac{1+\cos A}{2}=\frac{5}{4}b$，

由正弦定理得：

$\sin A+\sin A\cos C+\sin C+\cos A\sin C=\frac{5}{2}\sin B$，

所以 $\sin A+\sin C=\frac{3}{2}\sin B$，即 $a+c=\frac{3}{2}b$．（5 分）

因为 $b=2c$，所以 $a=2c$，

由 $a=2\sqrt{5}$，得 $a=b=2\sqrt{5}$，$c=\sqrt{5}$，

所以 $\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{7}{8}$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，

所以△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{5\sqrt{15}}{4}$．

（10 分）

18．**解**：(1)因为 $(n+1)a_n=n^2+2n+k$，

所以 $a_1=\frac{3+k}{2}$，$a_2=\frac{8+k}{3}$，$a_3=\frac{15+k}{4}$，

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，

所以 $2a_2=a_1+a_3$，

即 $\frac{2(8+k)}{3}=\frac{3+k}{2}+\frac{15+k}{4}$，解得 $k=1$，

所以 $a_1=2$，$a_2=3$，$a_n=2+(n-1)=n+1$．（4 分）

因为数列 $\{\log_2 b_n\}$ 是以 1 为首项，公差为 1 的等差数列，

所以 $\log_2 b_n=1+n-1=n$，$b_n=2^n$．（6 分）

(2)由(1)得 $c_n=(n+1)\cdot 2^n$，

所以 $T_n=2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+(n+1)\cdot 2^n$，①

$2T_n=2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n+(n+1)\cdot 2^{n+1}$，②（8 分）

①－②得 $-T_n=2\cdot 2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-(n+1)\cdot 2^{n+1}=2+\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\cdot 2^{n+1}=-n\cdot 2^{n+1}$，（11 分）

所以 $T_n=n\cdot 2^{n+1}$．（12 分）

19．**解**：(1)证明：因为 $AB\parallel CD$，$AD\perp DC$，$AB=AD=2$，所以 $BD=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，

又因为 $CD=4$，所以 $CD^2=BD^2+BC^2$，

故 $BC\perp BD$，

取 BD 的中点 O，连接 OA，OS，

因为 $SA=SB=SD=\sqrt{6}$，

所以 $SO\perp BD$，$\triangle SOB\cong\triangle SOA$，

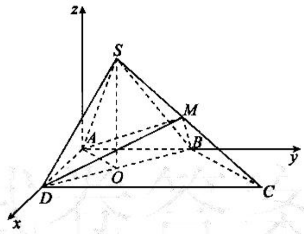
所以 $SO\perp OA$，

因为 $OA\cap OB=O$，所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp SO$，

又因为 $SO\cap BD=O$，所以 $BC\perp$ 平面 SBD．（6 分）

(2)如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$ 和垂直平面 $ABCD$ 的方向为 x，y，z 轴正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,4,0)$，$D(2,0,0)$，$S(1,1,2)$，

设 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CS}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，

则 $M(2-\lambda,4-3\lambda,2\lambda)$，

由(1)得平面 SBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{BC}=(2,2,0)$，

（8 分）

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ABM 的一个法向量，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=(2-\lambda,4-3\lambda,2\lambda)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}2y=0,\\ (2-\lambda)x+(4-3\lambda)y+2\lambda z=0,\end{cases}$

不妨取 $\boldsymbol{n}=(2\lambda,0,\lambda-2)$．（10 分）

设平面 SBD 与平面 ABM 所成的二面角为 θ，

所以 $\cos\theta=\left|\frac{4\lambda}{2\sqrt{2}\times\sqrt{4\lambda^2+(\lambda-2)^2}}\right|$

$=\left|\frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{5\lambda^2-4\lambda+4}}\right|=\frac{\sqrt{58}}{29}$，

整理得 $6\lambda^2+\lambda-1=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=-\frac{1}{2}$（舍

去)，

所以 $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{5}{3},3,\frac{2}{3}\right)$，$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\frac{25}{9}+9+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{110}}{3}$. （12分）

20. **解**：(1)列联表如下：

	超过2500小时	不超过2500小时	总计
A型	70	30	100
B型	50	50	100
总计	120	80	200

因为 $K^2=\frac{200\times(70\times50-30\times50)^2}{100\times100\times120\times80}\approx8.333>6.635$，

所以有99%的把握认为使用寿命是否超过2500小时与型号有关. （4分）

(2)由(1)和分层抽样的定义可知A型设备有3台，B型设备有5台，

所以 X 的取值可能为0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$，

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

所以 $E(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{9}{8}$. （8分）

(3)由频率分布直方图中的频率估计概率知：

A型设备每台更换的概率为0.3，

所以10台A型设备估计要更换3台；

B型设备每台更换的概率为0.5，

所以10台B型设备估计要更换5台.

选择A型设备的总费用 $y_1=(10+3)\times1+10\times2\times0.75\times2500\times10^{-4}=16.75$(万元)，

选择B型设备的总费用 $y_2=(10+5)\times0.6+10\times6\times0.75\times2500\times10^{-4}=20.25$(万元)$>16.75$(万元)，

所以选择A型设备. （12分）

21. **解**：(1)设右焦点 $(c,0)$，右顶点 $A(a,0)$，

因为 $2c=2\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$，

因为椭圆的左顶点 $(-a,0)$，

故直线方程为 $y=\frac{\sqrt{15}}{15}(x+a)$，即 $x-\sqrt{15}y+a=0$.

由题意知 $\frac{|a+a|}{\sqrt{1+15}}=b$，$a^2-b^2=3$，

解得 $a=2$，$b=1$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. （4分）

(2)由(1)可知右顶点 $A(2,0)$，且过点 A 的直线 AM 和 AN 的斜率存在且不为0，

设直线 AM 和 AN 的方程分别为 $y=k(x-2)$ 和 $y=-\frac{1}{k}(x-2)$，

设 $M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$.

因为直线 AM 和椭圆 C 交于 A，M 两点，

所以 $2x_M=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$，即 $x_M=\frac{8k^2-2}{1+4k^2}$，

$y_M=k(x_M-2)=\frac{-4k}{1+4k^2}$，$M\left(\frac{8k^2-2}{1+4k^2},\frac{-4k}{1+4k^2}\right)$，

同理 $N\left(\frac{8-2k^2}{k^2+4},\frac{4k}{k^2+4}\right)$. （8分）

设 x 轴上存在一定点 $Q(t,0)$，使得 $\angle MQA=\angle NQA$ 成立，

则 $k_{QM}+k_{QN}=0$，

即 $k_{QM}+k_{QN}=\frac{y_M}{x_M-t}+\frac{y_N}{x_N-t}=0$，即 $y_M\cdot x_N+y_N\cdot x_M=(y_M+y_N)\cdot t$. （10分）

因为 $y_M\cdot x_N+y_N\cdot x_M=\frac{-4k}{1+4k^2}\cdot\frac{8-2k^2}{k^2+4}+\frac{8k^2-2}{1+4k^2}\cdot\frac{4k}{k^2+4}=\frac{4k(10k^2-10)}{(4k^2+1)(4+k^2)}$，

$y_M+y_N=\frac{-4k}{1+4k^2}+\frac{4k}{k^2+4}=\frac{4k(3k^2-3)}{(4k^2+1)(4+k^2)}$，

即 $\frac{4k(10k^2-10)}{(4k^2+1)(4+k^2)}=\frac{4k(3k^2-3)}{(4k^2+1)(4+k^2)}\cdot t$,

解得 $t=\frac{10}{3}$.

因此 x 轴上存在一定点 $\left(\frac{10}{3},0\right)$，使得 $\angle MQA=\angle NQA$ 成立.　　(12 分)

22. **解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)+x^2+x+2$,

因为 $f'(x)=\frac{1}{x+1}+2x+1$,

所以 $f'(0)=2$,

因为 $f(0)=2$,

所以 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x+2$.　　(4 分)

(2) $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2+x)+2$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+a(2x+1)=\frac{2ax^2+3ax+a+1}{x+1}$,

令 $g(x)=2ax^2+3ax+a+1$, $\Delta=a^2-8a$.

①当 $\Delta\leqslant0$，即 $0<a\leqslant8$ 时，$g(x)\geqslant0$，故 $f'(x)\geqslant0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. 此时 $f(x)$ 无极大值.　　(6 分)

②当 $\Delta>0$，即当 $a>8$ 时，$g(x)$ 的对称轴 $x=-\frac{3}{4}$,

因为 $g(-1)=g\left(-\frac{1}{2}\right)=1>0$, $g\left(-\frac{3}{4}\right)=1-\frac{a}{8}<0$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 有两个零点 x_1, x_2，不妨设 $x_1<x_2$，其中 $x_1\in\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $x_2\in\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$.

所以当 $-1<x<x_1$ 时，$g(x)>0$, $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 上单调递增；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$g(x)<0$, $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递减；

当 $x>x_2$ 时，$g(x)>0$, $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增.

此时函数 $f(x)$ 有唯一的极大值点为 x_1，且 $-1<x_1<-\frac{3}{4}$.　　(9 分)

又因为 $g(x_1)=0$,

所以 $a=-\frac{1}{2x_1^2+3x_1+1}$,

所以 $f(x_1)=\ln(x_1+1)+\frac{-1}{2x_1^2+3x_1+1}(x_1^2+x_1)+2=\ln(x_1+1)-\frac{x_1}{2x_1+1}+2$,

记 $\varphi(t)=\ln(t+1)-\frac{t}{2t+1}+2\left(-1<t<-\frac{3}{4}\right)$,

则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{2t+1-2t}{(2t+1)^2}=\frac{t(4t+3)}{(t+1)(2t+1)^2}>0$,

所以 $\varphi(t)$ 单调递增，$\varphi(t)<\varphi\left(-\frac{3}{4}\right)=-2\ln 2+\frac{1}{2}$,

即 $f(x_1)<-2\ln 2+\frac{1}{2}$.　　(12 分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的

重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索“K12教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。