深圳北理莫斯科大学

2017. 试题及解答.

【试题】

1. 设 $x=-33/64$, $y=7/32$, 求如下表达式的值:

$$\sqrt{x^4-2x^2y+y^2}+\left(\sqrt{x^2+2xy+y^2}+y\right)^2-2x.$$

2. 求解方程

$$\operatorname{ctg}x+\frac{3+3\sin x}{\cos x}=0.$$

3. 设有互不相同的常数 a, b, c 满足下列条件:

1) a, b, c 分别为某等差数列的第 3 项, 第 10 项, 与第 18 项;

2) a, b, c （按该顺序）构成等比数列;

3) $a+b+c=507$.

求 a, b, c 的值.

4. 解不等式

$$2^{1+\arccos x}+2^{2-\arccos x}\leqslant 9.$$

5. 画出如下不等式所确定的平面区域, 并求出该区域的周长:

$$|x+3|-5\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}.$$

6. 设如下含参数 a 的不等式对任意 $x<0$ 都成立

$$ax^2-4x+3a+1>0.$$

求出所有满足该条件的 a 的取值.

7. 解不等式

$$\log_3(|x+5|+|x-4|)\log_{10}(24+x-3x^2)\leqslant 2.$$

8. 求解方程

$$Cx^{3n}=95,$$

其中 n 为多项式 $p(x)=(1+x-x^2)^{20}$ 的展开式各项系数之和, 而 C 为该多项式中 x^{3n} 所在项的系数.

【答案】

1. $5/4$.

2. $x = -\pi/6 + 2\pi k,\ -5\pi/6 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. $a = 147,\ b = 168,\ c = 192$.

4. $x \in [\cos 2, 1]$.

5. $\pi + 4 + 2\sqrt{2}$.

6. $a \geqslant 0$.

7. $x \in \left(-\dfrac{8}{3}, -2\right] \cup \left[\dfrac{7}{3}, 3\right)$.

8. $x = \dfrac{1}{2}$.

【解析】

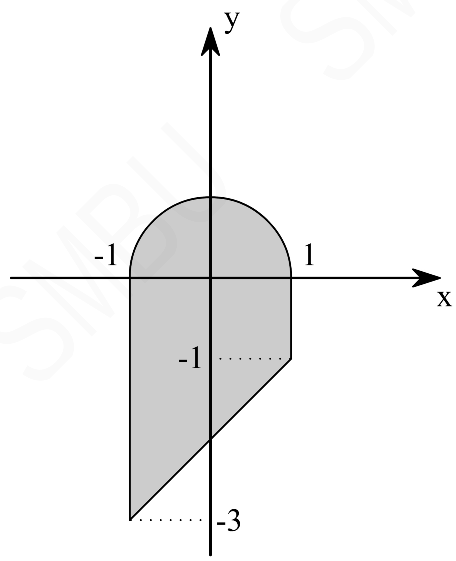
1. 由题设 x, y 之值, 有 $x + y < 0,\ x^2 < y$. 从而所给表达式可化简为 $y - x^2 + (-x - y + y)^2 - 2x = y - 2x$. 将 $x = -33/64,\ y = 7/32$ 代入, 得 $5/4$.

2. 该方程等价于如下方程组
$$\begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$$
从而 $\sin x = -1$ 或 $\sin x = -1/2$. 可能的解为:
$$x = -\pi/2 + 2\pi k,\ x = -\pi/6 + 2\pi k,\ x = -5\pi/6 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
由条件 $\cos x \neq 0$ 可排除 $x = -\pi/2 + 2\pi k$.

3. 由条件 1), $b = a + 7d,\ c = a + 15d$. 由条件 2) 及 3) 可得
$$\begin{cases} (a + 7d)^2 = a(a + 15d), \\ 3a + 22d = 507. \end{cases}$$
该方程组的解有两个: $d = 0,\ a = 169$, 及 $d = 3,\ a = 147$. 但由于 a, b, c 互异, 舍去第一个解.

4. 记 $t = 2^{\arccos x} > 0$. 该不等式可改写为 $2t^2 - 9t + 4 \leqslant 0$, 解得 $t \in [1/2, 4]$, 即 $\arccos x \in [-1, 2]$. 由函数 arccos 的性质, 可得 $x \in [\cos 2, 1]$.

5. 由表达式 $\sqrt{1 - x^2}$, 知 $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 从而, 左端不等式可化简为 $y \geqslant x - 2$. 进而, 所求区域为带形区域 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 中界于直线 $y = x - 2$ 与半圆弧 $x^2 + y^2 = 1\ (y \geqslant 0)$ 之间的部分.



可计算该区域的周长为 $\pi + 4 + 2\sqrt{2}$.

6. 若 $a < 0$, 则所给不等式在 x 充分大时显然不成立. 若 $a = 0$, 所给不等式的解集为 $x < 1/4$, 符合题意. 若 $a > 0$, 可考虑函数 $f(x) = ax^2 - 4x + 3a + 1$, 其在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 而 $f(0) = 3a + 1 > 0$, 因此对任意 $x < 0$ 成立 $f(x) > 0$, 从而亦符合题意.

7. 由对数函数的定义域, 必有 $24 + x - 3x^2 > 0$. 由此解得 $x \in (-8/3, 3)$. 而对于该区间上的 x 总成立 $|x+5| + |x-4| = 9$, 故不等式可化简为 $\log_{10}(24 + x - 3x^2) \leqslant 1$. 其等价于不等式组 $0 < 24 + x - 3x^2 \leqslant 10$, 解之得 $x \in (-8/3, -2] \cup [7/3, 3)$.

8. 多项式可展开为 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{40}x^{40}$, 其各项系数之和为 $p(1) = (1 + 1 - 1^2)^{20} = 1$, 从而 $n = 1$. 我们还需要找出 x^3 所在项的系数. 一种可能的办法为, 将多项式写成如下形式

$$p(x) = ((1 - x^2) + x)^{20} = (1 - x^2)^{20} + 20(1 - x^2)^{19}x + 190(1 - x^2)^{18}x^2 + 1140(1 - x^2)^{17}x^3 + q(x),$$

其中 $q(x)$ 中所有项的 x 幂次均大于等于 4. 又 $(1-x^2)^{20}$ 与 $190(1-x^2)^{18}x^2$ 不包含 x^3, 而 $20(1-x^2)^{19}x = 20x - 380x^3 + \ldots$, $1140(1 - x^2)^{17}x^3 = 1140x^3 + \ldots$, 故 x^3 所在项的系数为 $1140 - 380 = 760$. 综上, $n = 3, C = 760$. 求解方程 $760x^3 = 95$ 得 $x = 1/2$.