

15. W

5. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\omega x}{2} \cdot \cos \frac{\omega x}{2} - \cos^2 \frac{\omega x}{2}$ ($\omega > 0$) 在 $(0, \frac{4\pi}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$ 上单调递减,

若函数 $f(x)$ 在 $(\frac{17\pi}{3}, a)$ 上单调, 则 a 的最大值为

16. V

A. $\frac{35\pi}{6}$

B. $\frac{23\pi}{3}$

C. $\frac{20\pi}{3}$

D. $\frac{22\pi}{3}$

6. 疫情期间, 按照防疫要求, 学生在进校时必须排队接受体温检测, 某校早上 7:30 开校门, 此时刻没有学生. 一分钟后有 59 名学生到校, 以后每分钟比前一分钟少到 2 人. 校门口的体温自动检测棚每分钟可检测 40 人, 为了减少排队等候的时间, 7:34 校门口临时增设一个人工体温检测点, 人工每分钟可检测 12 人, 则人工检测 () 分钟后校门口不再出现排队等候的情况.

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

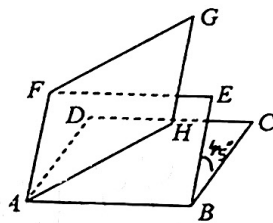
7. 如图, 把一个长方形的硬纸片 $ABCD$ 沿长边 AB 所在直线逆时针旋转 45° 得到第二个平面 $ABEF$, 再沿宽边 AF 所在直线逆时针旋转 45° 得到第三个平面 $AFGH$, 则第一个平面和第三个平面所成的锐二面角大小的余弦值是

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ae^{-x}, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ($a > 0$) 图象上存在关于 y 轴对称的两点, 则正数 a 的取值范围是

A. $(e, +\infty)$

B. $(0, \frac{1}{e})$

C. $(\frac{1}{e}, e)$

D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. A, B 为随机事件, 已知 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.3$, 下列结论中正确的是

A. 若 A, B 为互斥事件, 则 $P(A+B) = 0.8$

B. 若 A, B 为互斥事件, 则 $P(\bar{A} + \bar{B}) = 0.8$

C. 若 A, B 是相互独立事件, $P(A+B) = 0.65$

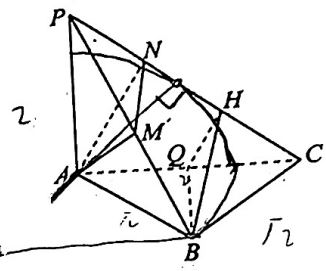
D. 若 $P(B|A) = 0.5$, 则 $P(B|\bar{A}) = 0.1$

10. 已知函数 $f(x)$ 和 $f(x+1)$ 都是偶函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = -(x-1)^2 + 2$, 则下列正确的结论是

- A. 当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = -(x+1)^2 + 2$
- B. 若函数 $g(x) = f(x) - 2^{x-1} - 1$ 在区间 $(0, 2)$ 上有两个零点 x_1, x_2 , 则有 $x_1 + x_2 < 2$
- C. 函数 $h(x) = \frac{f(x)}{2^x}$ 在 $[4, 6]$ 上的最小值为 $\frac{1}{64}$
- D. $f(\log_3 4) < f(\log_4 \frac{5}{16})$

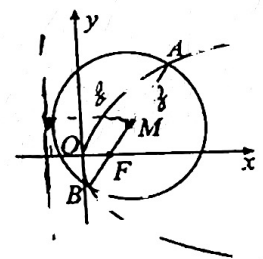
11. 在四面体 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB = BC = \sqrt{2}$, $PA = AC = 2$, 点 $M \in PB$, $N \in PC$, Q 为 AC 的中点, $QH \perp PC$, 垂足为 H , 连结 BH , 则正确的结论有

- A. 平面 $BQH \perp$ 平面 PBC
- B. 若平面 $AMN \perp$ 平面 PBC , 则一定有 $AM \perp PB$
- C. 若平面 $AMN \perp$ 平面 PBC , 则一定有 $AN \perp PC$
- D. 点 R 是平面 PBC 上的动点, $AR = \sqrt{2}$, 则当直线 AR 与 BC 所成角最小时, 点 R 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$



12. 已知抛物线 $W: y^2 = 2px$ 与圆 $M: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 64$ 相交于 A, B , 线段 AB 恰为圆 M 的直径, 且直线 AB 过抛物线 W 的焦点 F , 则正确的结论是

- A. $p = 4$ 或 $p = 8$
- B. 圆 M 与抛物线 W 的准线相切
- C. 在抛物线 W 上存在关于直线 AB 对称的两点
- D. 线段 AB 的垂直平分线与抛物线 W 交于 C, D , 则有 $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$

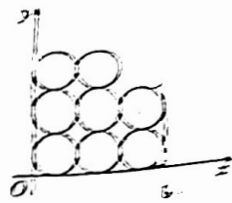


三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

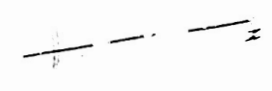
13. $(x + \frac{1}{x})(1+x)^5$ 展开式中一次项的系数是 _____ . (请填具体数值)

14. 袋中有形状和大小相同的两个红球和三个白球, 甲、乙两人依次不放回地从袋中摸出一球, 后摸球的人不知前面摸球的结果, 则乙摸出红球的概率是 _____ .

15. 如图, 8 个半径为 1 的圆摆在坐标平面的第一象限 (每个圆与相邻的圆或坐标轴外切). 设 L 为八个圆形区域的并集, 斜率为 3 的直线 l 将 L 划分为面积相等的两个区域, 则坐标原点到直线 l 的距离为 _____ .



第15题图



第16题图

16. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 2$ 的右焦点为 F , 折线 $y =$

(图), 则 $\triangle ABF$ 的面积为 _____.

四、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \lambda > 0, a_n \cdot a_{n+1} = 2^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$

(1) 证明: $n \geq 2$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$;

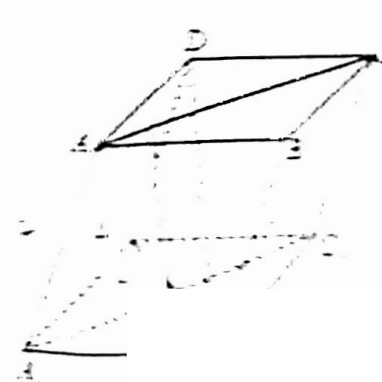
(2) 是否存在这样的正数 λ , 使得数列 $\{a_n\}$ 是等比数列. 若存在, 求出 λ 值, 并证明; 若不存在, 请说明理由.

18. (12 分) 已知平行六面体 (底面是平行四边形的四棱柱) $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的各条棱长均为 2, 且有

$$\angle AA_1D_1 = \angle AA_1B_1 = \angle D_1A_1B_1 = 60^\circ.$$

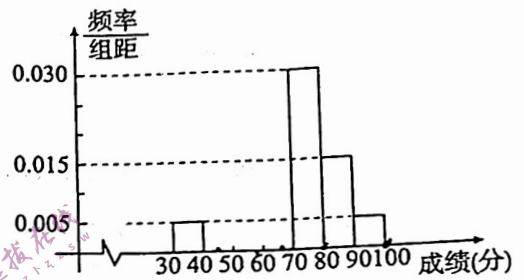
(1) 求证: 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$;

(2) 求直线 B_1D_1 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值.



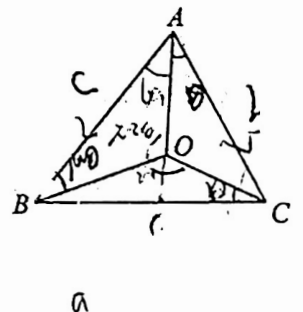
19. (12分)某市对全体高中学生举行了一次关于环境保护相关知识的测试. 统计人员从全市高中学生中随机抽取 100 名学生的成绩作为样本进行统计, 测试满分为 100 分, 统计后发现所有学生的测试成绩都在区间 $[30, 100]$ 内, 并且 $[30, 40]$, $(40, 50]$, $(50, 60]$, $(60, 70]$ 段内的人数恰成等差数列, 如图所示是频率分布直方图的一部分.

- (1)请补全频率分布直方图(标上纵坐标的值), 直接写出百分之八十五分位数: _____ (精确到 0.1);
- (2)用样本频率估计总体, 从全市高中学生中随机抽取 2 名学生, 记成绩在区间 $[80, 100]$ 内的人数为 X , 成绩在区间 $[70, 100]$ 内的人数为 Y , 记 $Z = Y - X$, 比较 $E(Y) - E(X)$ 与 $E(Z)$ 的大小关系.



20. (12分) $\triangle ABC$ 内一点 O , 满足 $\angle OAC = \angle OBA = \angle OCB$, 则点 O 称为三角形的布洛卡点. 王聪同学对布洛卡点产生兴趣, 对其进行探索得到许多正确结论, 比如 $\angle BOC = \pi - \angle ABC = \angle BAC + \angle ACB$, 请你和他一起解决如下问题:

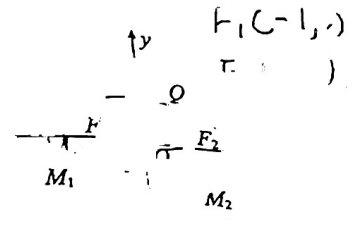
- (1)若 a, b, c 分别是 A, B, C 的对边, $\angle CAO = \angle BAO = \angle OBA = \angle OCB$, 证明: $a^2 = bc$;
- (2)在(1)的条件下, 若 $\triangle ABC$ 的周长为 4, 试把 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 表示为 a 的函数 $f(a)$, 并求 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 的取值范围.



21. (12分) 已知 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 点 $A(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 是椭圆 C 上一点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 $Q(x_0, y_0)$ 是椭圆 C 上且处于第一象限的动点, 直线 QF_1, QF_2 与椭圆 C 分别相交于 M_1, M_2 两点, 直线 M_1F_2, M_2F_1 相交于点 N , 试求 $S_{\Delta M_2NF_2} - S_{\Delta M_1NF_1}$ 的最大值.



22. (12分) 已知函数 $f(x) = ax^2 + \ln(x-1)$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a > 2$, 在 $x \in (\frac{3}{2}, +\infty)$ 内存在不等实数 x_1, x_2 , 使得 $f(x_1) + f(x_2) = 8a$, 证明: $x_1 + x_2 < 4$.

