高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid 0<x<1\}$，$B=\{x\mid \log_2 x<1\}$，则

A. $A\cap B=A$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$

C. $A\cap B=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

2. 已知空间四个点，则“这四个点中有三点在同一直线上”是“这四个点在同一平面内”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 若双曲线 $x^2-m^2y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$ 的两条渐近线互相垂直，则 $m=$

A. -1　　B. ± 1　　C. 2　　D. ± 2

4. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha$，则 $\dfrac{\cos(\pi-2\alpha)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=$

A. $-\frac{\sqrt{14}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 已知复数 z 的实部和虚部均为整数，则满足 $|z-1|\leqslant\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|$ 的复数 z 的个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 函数 $f(x)=x\sin 2\pi x-1$ 在区间 $[-3,3]$ 上的零点个数为

A. 10　　B. 8　　C. 6　　D. 4

7. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移1个单位长度后，再向上平移4个单位长度，所得函数图象与曲线 $y=4^x$ 关于直线 $x=1$ 对称，则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=$

A. -4　　B. -3　　C. -2　　D. 4

8. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，且满足 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，若 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\frac{9}{10}\overrightarrow{BC}$，则 $\cos\angle AOC=$

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，则

A. $f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x)$ 的图象与函数 $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合

C. $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

D. 存在唯一的 $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $f(x_0)=\frac{9}{10}$

10. 设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，若 B 发生时 A 必定发生，则下列结论错误的是

A. $P(A+B)=P(B)$ B. $P(B|A)=\frac{P(A)}{P(B)}$

C. $P(A|B)=1$ D. $P(AB)=P(A)$

11. 已知 $m>1,n>1$，若 $e^m>me^{n+1}-ne^m$，则

A. $\frac{e^m}{m}>\frac{e^{n+1}}{n+1}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\left(\frac{1}{2}\right)^n$

C. $2^{m-4}+2^{-n}>\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\log_3(m+n)>1$

12. 已知曲线 C 的方程为 $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4y^2}=2xy$，点 P 在 C 上，O 为坐标原点，则

A. 曲线 C 关于原点对称

B. $\frac{1}{2}\leqslant|OP|\leqslant1$

C. 设 C 与坐标轴所围成图形的面积为 S，则 $\frac{3}{2}<S<2$

D. 若 M 是直线 $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{2}$ 上的一点，则 $|PM|\geqslant\frac{\sqrt{10}}{5}$

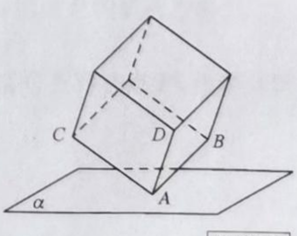
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若直线 $l: ax-y+2-a=0(a\in\mathbf{R})$ 与圆 $C:(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 相交于 A,B 两点，当 $|AB|$ 取得最小值时，直线 l 的斜率为__________.

14. 2022 年 9 月 19 日，航天科技集团五院发布消息称，近日在法国巴黎召开的第 73 届国际宇航大会上，我国火星探测天问一号任务团队首次获得国际宇航联合会 2022 年度世界航天奖. 为科普航天知识，某校组织学生参与航天知识竞答活动，某班 8 位同学的得分成绩如下：7，6，8，9，8，7，10，m. 若去掉 m，该组数据的下四分位数保持不变，则整数 $m(1\leqslant m\leqslant10)$ 的值可以是__________.（写出一个满足条件的 m 值即可）

15. $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中，有理项是__________.（用关于 x 的式子表示）

16. 如图，某正方体的顶点 A 在平面 α 内，三条棱 AB,AC,AD 都在平面 α 的同侧. 若顶点 B,C,D 到平面 α 的距离分别为 $\sqrt{2},\sqrt{3},2$，则该正方体外接球的表面积为__________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

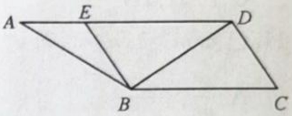
若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，$a_1=m$，m 为常数.

(1)求证：$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列；

(2)若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}>a_n$，求实数 m 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，E 为 AD 上一点，若 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$，$AB=\sqrt{3}$，$BE=1$，$A=\frac{\pi}{6}$.



(1)求证：$\angle ABD>\frac{\pi}{2}$；

(2)若 $BD=\sqrt{3}AE$，$CD=1$，$\angle C=2\angle CBD$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

19.（本小题满分 12 分）

如图 1，已知 $ABCD$ 是上下底边长分别为 2 和 6，高为 $\sqrt{3}$ 的等腰梯形，将它沿对称轴 OO_1 折起，并连接 AB，CD 得到如图 2 所示的几何体 $OABCDO_1$.

(1)判断几何体 $OABCDO_1$ 是哪种简单几何体，并证明；

(2)在几何体 $OABCDO_1$ 中，若二面角 $A-OO_1-B$ 为直二面角，求二面角 $O-AC-O_1$ 的余弦值.

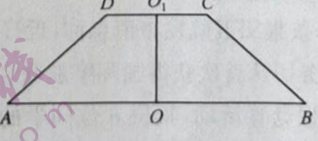


图1

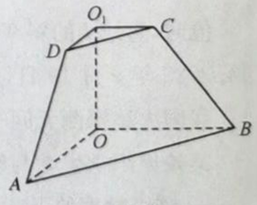


图2

20.(本小题满分 12 分)

2022 年 11 月 21 日,我国迄今水下考古发现的体量最大的木质沉船——长江口二号古船,在长江口横沙水域成功整体打捞出水.上海市文物局会同交通运输部上海打捞局,集成先进的打捞工艺、技术路线、设备制造,最终研究并形成了世界首创的"弧形梁非接触文物整体迁移技术"来打捞这艘古船.这是全新的打捞解决方案,创造性地融合了核电弧形梁加工工艺、隧道盾构掘进工艺、沉管隧道对接工艺,并运用液压同步提升技术、综合监控系统等先进的高新技术.这些技术也是首次应用于文物保护和考古领域.

近年来,随着科学技术的发展,越来越多的古迹具备了发掘的条件,然而相关考古专业人才却严重不足.某调查机构为了解高三学生在志愿填报时对考古专业的态度,在某中学高三年级的 1 200 名男生和 800 名女生中按比例分配的分层,随机抽取 20 名学生进行了调查,调查结果如下表:

	不填报	填报	
		非第一志愿填报	第一志愿填报
男生	x	5	2
女生	y	1	0

(1)完成列联表,并依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验判断是否可以认为该校学生填报志愿时"是否填报考古专业"与性别有关联?

	男生	女生	总计
不填报			
填报			
总计			20

(2)从抽出的男生中再随机抽取 3 人进一步了解情况,记 X 为抽取的这 3 名男生中"第一志愿填报考古专业"和"非第一志愿填报考古专业"人数差的绝对值,求 X 的数学期望.

附:$\chi^2=\dfrac{(a+b+c+d)(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

α	0.05	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

21.(本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=ae^{2x}-(2x+1)e^x,a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2)若 $a<0$,且 $f(x)$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上有极值,求实数 a 的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离比到 y 轴的距离大 1,记点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程;

(2)设过点 F 且不与 x 轴重合的直线 l 与 C 交于 A,B 两点,求证:在曲线 C 上存在点 P,使得直线 PA,OP,PB 的斜率成等差数列.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $A=\{x\mid 0<x<1\}$，$B=\{x\mid 0<x<2\}$，所以 $A\cap B=A$，$A\cup B=B$. 故选 A.

2. A　"这四个点中有三点在同一直线上"，一定能推出"这四点在同一个平面内"，充分性成立；"四个点在同一平面内"不能推出有三点在同一直线上，必要性不成立，所以前者是后者的充分不必要条件. 故选 A.

3. B　由 $x^2-m^2y^2=0$，得渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{m}x$，又双曲线 $x^2-m^2y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$ 的两条渐近线互相垂直，所以 $-\frac{1}{m}\times\frac{1}{m}=-1$，解得 $m=\pm 1$. 故选 B.

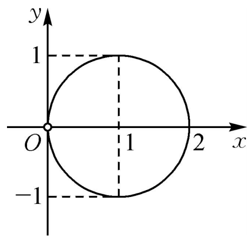
4. D　因为 $\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha$，即 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\cos(\pi-2\alpha)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-\cos 2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=-\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.

5. C　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{Z})$，则 $\bar{z}=a-bi$，$|z-1|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$，$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|=\frac{|z|}{|\bar{z}|}=1$. 所以 $(a-1)^2+b^2\leqslant 1$.

法一：因为 $(a-1)^2\geqslant 0$，所以 $b^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant b\leqslant 1$.

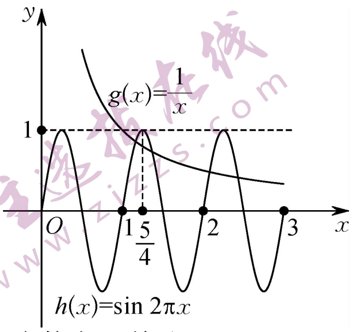
当 $b=\pm 1$ 时，$a-1=0$，即 $a=1$，有两组满足条件 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}\begin{cases}a=1,\\b=1;\end{cases}$

当 $b=0$ 时，$a-1=0$ 或 $a-1=\pm 1$，所以 $\begin{cases}a=1,\\b=0,\end{cases}\begin{cases}a=2,\\b=0,\end{cases}\begin{cases}a=0,\\b=0.\end{cases}$ 但 $a=0$，$b=0$ 时 $\bar{z}=0$，不符合题意，故选 C.



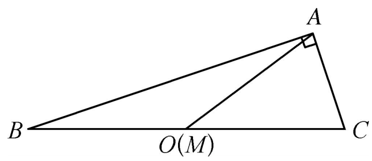
法二：如图，可转化为研究圆面 $(a-1)^2+b^2\leqslant 1$ 内（包括边界）的整点个数. 圆面包括的整点分别为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(2,0)$，$(1,1)$，$(1,-1)$，而 $(0,0)$ 不适合 $\bar{z}\neq 0$，则符合题意的整点共有 4 个. 故选 C.

6. B　因为 $f(0)=-1\neq 0$，所以 0 不是 $f(x)$ 的零点. 当 $x\neq 0$ 时，方程 $x\sin 2\pi x-1=0$ 的解的个数为函数 $h(x)=\sin 2\pi x$ 与 $g(x)=\frac{1}{x}$ 的图象在 $[-3,3]$ 上交点的个数，在同一坐标系中作出 $h(x)=\sin 2\pi x$ 与 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,3]$ 上的图象（注意到当 $0<x\leqslant 1$ 时，$g(x)$ 单调递减，$g(x)\geqslant 1$，$h(x)\leqslant 1$，$g(1)=1$，$h(1)=0$，$g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{4}{5}<h\left(\frac{5}{4}\right)=1$），如图所示，由图可知在区间 $(0,3]$ 上，两函数图象有 4 个交点，而 $h(x)=\sin 2\pi x$ 与 $g(x)=\frac{1}{x}$ 均为奇函数，故在 $[-3,3]$ 上两图象交点个数为 8，即 $f(x)=x\sin 2\pi x-1$ 在区间 $[-3,3]$ 上的零点个数为 8. 故选 B.



7. D　函数 $y=4^{2-x}$ 的图象与曲线 $y=4^x$ 关于直线 $x=1$ 对称，将 $y=4^{2-x}$ 的图象向下平移 4 个单位长度得到 $y=4^{2-x}-4$ 的图象，将 $y=4^{2-x}-4$ 的图象向左平移 1 个单位长度得到 $y=4^{2-(x+1)}-4=4^{1-x}-4$ 的图象，即 $f(x)=4^{1-x}-4$，故 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=4^{1+\frac{1}{2}}-4=4$. 故选 D.

8. C　设 BC 的中点为 M，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，所以 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AM}$，所以外心 O 与中点 M 重合，故 $\triangle ABC$ 是以 A 为直角顶点的直角三角形.



法一：$\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $(|\overrightarrow{BA}|\cos B)\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\left(\frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BC}|}\cos B\right)\overrightarrow{BC}=\cos^2 B\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{9}{10}\overrightarrow{BC}$，所以 $\cos^2 B=\frac{9}{10}$，又 $\cos\angle AOC=\cos 2B=2\cos^2 B-1=2\times\frac{9}{10}-1=\frac{4}{5}$. 故选 C.

法二：因为 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\frac{9}{10}\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{MA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\frac{9}{10}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$，而 $|\overrightarrow{MA}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$，

则 $\cos\angle AOC=\cos\angle AMC=\frac{\left|\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}\right|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|}=\frac{4}{5}$. 故选 C.

9. BC　因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，则 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

对于 A，法一：$f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(\pi-2x)=\sin 2x$，$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(2x+\pi)$

$=-\sin 2x$，$f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\neq f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，则 A 错误；

法二：$f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$意味着 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称，将 $x=\frac{\pi}{3}$代入 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，得$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称，则 A 错误；

对于 B，$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，则 B 正确；

对于 C，$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(-\pi-2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，则 C 正确；

对于 D，$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，当$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$时，$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant f(x)\leqslant 1$，$\exists x_1\in\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$，使得$f(x_1)=\sin\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{10}$；当$\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，即$\frac{\pi}{12}<x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant f(x)<1$，$\exists x_2\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$，使得$f(x_2)=\sin\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{10}$. 所以在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上，$f(x)=\frac{9}{10}$有两解，则 D 错误. 故选 BC.

10. ABD　由题意，$B\subseteq A$，所以 $A+B=A$，$AB=B$，所以 $P(A+B)=P(A)$，$P(AB)=P(B)$，则 A，D 错误；$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}$，则 B 错误；$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$，则 C 正确. 故选 ABD.

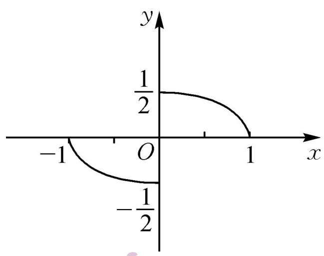
11. ACD　对于 A，因为 $e^m>me^{n+1}-ne^m$，所以$(n+1)e^m>me^{n+1}$，即$\frac{e^m}{m}>\frac{e^{n+1}}{n+1}$，则 A 正确；

对于 B，令 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>1)$，则 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}>0$，所以 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增；由$\frac{e^m}{m}>\frac{e^{n+1}}{n+1}$，得$f(m)>f(n+1)$，所以 $m>n+1$，即 $m-1>n$，所以$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^n$，则 B 错误；

对于 C，因为 $m>n+1$，所以 $2^{m-4}+2^{-n}>2^{n-3}+2^{-n}\geqslant 2\sqrt{2^{n-3}\cdot 2^{-n}}=2\sqrt{2^{-3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $2^{m-4}+2^{-n}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 C 正确；

对于 D，因为 $m+n>n+1+n=2n+1>3$，所以 $\log_3(m+n)>1$，则 D 正确. 故选 ACD.

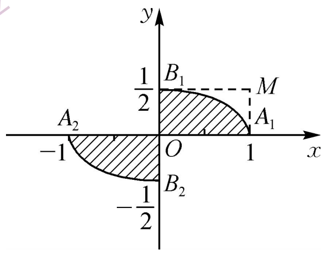
12. ABD　根据题意，$1-x^2\geqslant 0$ 且 $1-4y^2\geqslant 0$，即 $x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，显然当 $xy<0$ 时，不满足 C 的方程；当 $xy\geqslant 0$ 时，两边平方化简，得 $x^2+4y^2=1$，曲线 C 表示椭圆 $x^2+4y^2=1$ 在第一象限和第三象限内的部分及坐标轴上的点，如下图所示：



用$-x$，$-y$ 分别代替 x，y，C 的方程不变，所以曲线 C 关于原点对称. 故 A 正确；

设 $P(x,y)$，则$|OP|^2=x^2+y^2=(1-4y^2)+y^2=1-3y^2$. 由 $0\leqslant y^2\leqslant\frac{1}{4}$，得$\frac{1}{4}\leqslant 1-3y^2\leqslant 1$，所以$\frac{1}{2}\leqslant|OP|\leqslant 1$. 故 B 正确；

对于 C，曲线 C 与坐标轴所围成的图形如下图阴影部分所示（A_1，A_2，B_1，B_2 是曲线与坐标轴交点），



以 OA_1，OB_1 为邻边作矩形 OA_1MB_1，则阴影部分的面积 $S<2S_{矩形OA_1MB_1}=2\times 1\times\frac{1}{2}=1$，故 C 错误；

对于 D，易知直线 $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{2}$在曲线 C 上方，且没有公共点. 设 $y=-\frac{1}{2}x+b$，与 $x^2+4y^2=1$ 联立消去 y，得 $2x^2-4bx+4b^2-1=0$，若直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与椭圆 C 相切，则 $\Delta=16b^2-8(4b^2-1)=0$，解得 $b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，切点在

第一象限，所以直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{2}$ 间的距离即为 $|PM|$ 的最小值，即 $|PM|_{\min}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以 $|PM|\geqslant\frac{\sqrt{10}}{5}$，故 D 正确. 故选 ABD.

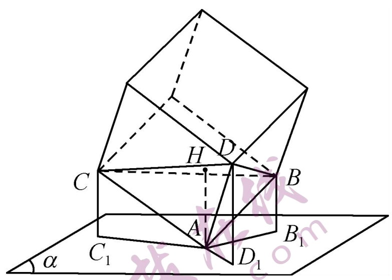
13. 2　由题意，得圆 C 的圆心 $C(3,1)$，半径 $r=3$，直线 l 过定点 $P(1,2)$，点 P 在圆 C 内. 所以当 $PC\perp l$ 时，$|AB|$ 取得最小值，此时 PC 的斜率 $k=\frac{1-2}{3-1}=-\frac{1}{2}$，故 l 的斜率为 2. 全科免费下载公众号《高中僧课堂》

14. 7(或 8 或 9 或 10)　去掉 m 后的七个数从小到大排列为 6,7,7,8,8,9,10，下四分位数就是第二个数 7，且第 2 个数和第 3 个数都是 7；而八个数的下四分位数是从小到大排列后，第二个数和第三个数的平均值，所以只要 $m\geqslant 7$，全部八个数从小到大排列后第 2 个数和第 3 个数就都还是 7，下四分位数就不会变. 所以整数 m 的值可以是 7，或 8，或 9，或 10.

15. $28x$ 和 x^{-4}　$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt[3]{x})^{8-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_8^r\cdot x^{\frac{16-5r}{6}}(0\leqslant r\leqslant 8)$，由 $\frac{16-5r}{6}\in\mathbf{Z}$，得 $r=2$ 或 8，$T_{2+1}=C_8^2\cdot x=28x$，$T_{8+1}=C_8^8\cdot x^{-4}=x^{-4}$，故有理项是 $28x$ 和 x^{-4}.

16. 27π　法一：设正方体的棱长为 a，取空间的一个基底 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$，设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个方向向上的单位法向量. 由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组 (x,y,z)，使得 $\boldsymbol{n}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$. 由题意，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影向量的长度分别为 $\sqrt{2},\sqrt{3},2$. 于是，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}$，即 $(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}$，即 $xa^2=\sqrt{2}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{a^2}$. 同理，$y=\frac{\sqrt{3}}{a^2}$，$z=\frac{2}{a^2}$. 从而 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{a^2}(\sqrt{2}\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD})$. 由 $|\boldsymbol{n}|=1$，得 $\frac{1}{a^2}\sqrt{2a^2+3a^2+4a^2}=1$，即 $\frac{1}{a^2}\cdot 3a=1$，解得 $a=3$，所以正方体的外接球半径为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，外接球的表面积为 $4\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=27\pi$.

法二：如图，连结 BC,CD,BD，过 A 向上作平面 α 的垂线段 AH，接下来以 AH 为一条体对角线，同时将顶点 A 处的三条棱放在正方体的棱 AB,AC,AD 上作一个长方体，AB',AC',AD' 是长方体的三条棱(图略)，则 $AB'^2+AC'^2+AD'^2=AH^2$，则 $\cos^2\angle BAH+\cos^2\angle CAH+\cos^2\angle DAH=\frac{AB'^2}{AH^2}+\frac{AC'^2}{AH^2}+\frac{AD'^2}{AH^2}=\frac{AB'^2+AC'^2+AD'^2}{AH^2}=1$. 作 $BB_1\perp\alpha$ 于 B_1，$CC_1\perp\alpha$ 于 C_1，$DD_1\perp\alpha$ 于 D_1；连结 AB_1，AC_1，AD_1，令 $\angle BAB_1=\theta$，$\angle CAC_1=\gamma$，$\angle DAD_1=\beta$，由 $\cos^2\angle BAH+\cos^2\angle CAH+\cos^2\angle DAH=1$，可得 $\sin^2\theta+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，设正方体的棱长为 a，因为 $BB_1=\sqrt{2}$，$CC_1=\sqrt{3}$，$DD_1=2$，，所以 $\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2=1$，解得 $a^2=9$，故该正方体外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，外接球的表面积为 $4\pi\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=27\pi$.



17. (1)证明：因为 $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，

等式两边同除以 2^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$，即 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$，…………………………………… 3 分

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{m}{2}$，公差为 1 的等差数列. …………………………………… 5 分

(2)解：由(1)得 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{m}{2}+(n-1)$，因此 $a_n=m\cdot 2^{n-1}+(n-1)\cdot 2^n$. …………………………………… 6 分

由 $a_{n+1}>a_n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，得 $m\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}>m\cdot 2^{n-1}+(n-1)\cdot 2^n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 均成立.
因为 $2^{n-1}>0$，不等式两边同除以 2^{n-1}，得 $2m+4n>m+2n-2$，
即 $m>-2n-2$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立. …………………………………… 8 分
当 $n=1$ 时，$-2n-2$ 取最大值 -4，所以 $m>-4$，
所以实数 m 的取值范围为 $(-4,+\infty)$. …………………………………… 10 分

18. (1)证明：在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理，得 $BE^2=AE^2+AB^2-2AE\times AB\times\cos A$，即 $1=AE^2+3-3AE$，解得 $AE=1$ 或 2.
…………………………………… 1 分

当 $AE=1$ 时，由 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$，得 $DE=2$，$AD=3$.

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得 $BD^2=AD^2+AB^2-2AD\times AB\times\cos A=9+3-2\times 3\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，

所以 $BD=\sqrt{3}$.

此时 $BD=AB$，$\angle BDA=\angle BAD=\frac{\pi}{6}$，$\angle ABD=\frac{2\pi}{3}>\frac{\pi}{2}$. …………………………………… 3 分

当 $AE=2$ 时,由 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$,得 $DE=4,AD=6$.

在△ABD 中,由余弦定理,得 $BD^2=AD^2+AB^2-2AD\times AB\times\cos A=36+3-2\times6\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=21$,

所以 $\cos\angle ABD=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2\times AB\times BD}=\frac{3+21-36}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{21}}<0$,

又 $\angle ABD\in(0,\pi)$,所以 $\angle ABD>\frac{\pi}{2}$. …………………………………………………………………………… 5 分

综上,$\angle ABD>\frac{\pi}{2}$. …………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)解:因为 $BD=\sqrt{3}AE$,结合(1)得 $BD=\sqrt{3},AE=1$. ……………………………………………………… 7 分

设 $\angle CBD=\alpha$,则 $\angle C=2\alpha$,

在△BCD 中,由正弦定理,得 $\frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{BD}{\sin2\alpha}$,

即 $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sin2\alpha}\Rightarrow\sin2\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha$, ……………………………………………………………… 8 分

所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha$,

由 $0<2\alpha+\alpha<\pi$,可得 $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$,所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,

则 $\angle C=\frac{\pi}{3}$,$\angle CDB=\frac{\pi}{2}$,所以四边形 ABCD 的面积

$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{5\sqrt{3}}{4}$. …………………………………… 12 分

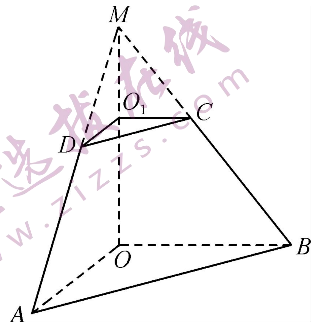
19.(1)解:几何体 $OABCDO_1$ 是三棱台,证明如下: …………………………………………………………… 1 分

由条件知 $DO_1\parallel AO$,又 $AO\subset$ 平面 AOB,$DO_1\not\subset$ 平面 AOB,

所以 $DO_1\parallel$ 平面 AOB,同理,$CO_1\parallel$ 平面 AOB.

因为 $DO_1\cap CO_1=O_1$,所以平面 $DCO_1\parallel$ 平面 AOB. ……………………………………………………… 3 分

另一方面,延长 AD,OO_1 交于点 M,如图,



因为 $DO_1\parallel AO$ 且 $DO_1=\frac{1}{3}AO$,

所以 $\frac{O_1M}{O_1M+OO_1}=\frac{O_1M}{OM}=\frac{DO_1}{AO_1}=\frac{1}{3}$,解得 $O_1M=\frac{1}{2}OO_1$.

同理,延长 BC,OO_1 交于点 M',也可得 $O_1M'=\frac{1}{2}OO_1$,

故点 M 和点 M' 重合,即 AD,BC,OO_1 延长后交于同一点 M,

从而几何体 $OABCDO_1$ 是三棱台. ………………………………………………………… 6 分

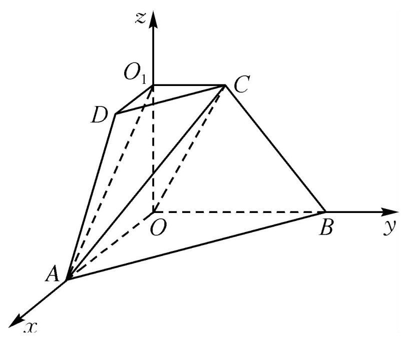
(2)解:因为 $OA\perp OO_1$,$OB\perp OO_1$.

所以 $\angle AOB$ 是直二面角 $A-OO_1-B$ 的一个平面角,

从而 $OA\perp OB$. ………………………………………………………………………………………………… 7 分

以 O 为原点,OA,OB,OO_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $O(0,0,0),A(3,0,0),B(0,3,0),C(0,1,\sqrt{3}),O_1(0,0,\sqrt{3})$.



…………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $\overrightarrow{AC}=(-3,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BO_1}=(0,-3,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BO_1}=-3+\sqrt{3}\times\sqrt{3}=0$,

所以 $BO_1\perp AC$,又因为 $\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{OC}=-3+\sqrt{3}\times\sqrt{3}=0$,所以 $BO_1\perp OC$.

而 $AC,OC\subset$ 平面 AOC,$AC\cap OC=C$,

所以 $BO_1\perp$ 平面 OAC,$\overrightarrow{BO_1}$ 是平面 OAC 的一个法向量. ……………………… 9 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 O_1AC 的一个法向量,

由 $\overrightarrow{O_1C}=(0,1,0)$ 及 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{O_1C}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-3x+y+\sqrt{3}z=0,\\y=0,\end{cases}$

取 $z=\sqrt{3}$,得 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3})$. ……………………………………………………………………………… 11 分

设二面角 $O-AC-O_1$ 的大小为 θ,由图可知,θ 为锐角,

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BO_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BO_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BO_1}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

即二面角 $O-AC-O_1$ 的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. …………………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)设抽取的 20 人中,男、女生人数分别为 n_1, n_2,则 $\begin{cases} n_1=\dfrac{20\times1\ 200}{2\ 000}=12, \\ n_2=\dfrac{20\times800}{2\ 000}=8, \end{cases}$

所以 $x=12-5-2=5, y=8-1-0=7$.

列联表如下:

	男生	女生	总计
不填报	5	7	12
填报	7	1	8
总计	12	8	20

………………………………………………………………………………………… 3 分

零假设为

H_0:"是否填报考古专业"与性别无关联. ……………………………………………… 4 分

根据列联表中的数据,经计算得到

$\chi^2=\dfrac{20\times(5\times1-7\times7)^2}{12\times8\times8\times12}\approx4.201>3.841=x_{0.05}$. ……………………………………… 5 分

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为"是否填报考古专业"与性别有关联,此推断犯错误的概率不大于 0.05. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)X 的可能取值为 0,1,2,3, ………………………………………………………… 7 分

$P(X=0)=\dfrac{C_5^3+C_5^1C_5^1C_2^1}{C_{12}^3}=\dfrac{60}{220}$;

$P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_2^2+C_5^2C_2^1+C_5^2C_2^1+C_5^2C_5^1}{C_{12}^3}=\dfrac{95}{220}$;

$P(X=2)=\dfrac{C_5^1C_2^2+C_5^1C_5^2}{C_{12}^3}=\dfrac{55}{220}$;

$P(X=3)=\dfrac{C_5^3}{C_{12}^3}=\dfrac{10}{220}$. …………………………………………………………… 11 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{60}{220}+1\times\dfrac{95}{220}+2\times\dfrac{55}{220}+3\times\dfrac{10}{220}=\dfrac{47}{44}$. ……………………………… 12 分

21. 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=e^{2x}-(2x+1)e^x$,

则 $f(0)=e^0-e^0=0$,切点为 $(0,0)$. ……………………………………………………… 1 分

$f'(x)=e^x(2e^x-2x-3)$,$f'(0)=e^0(2e^0-3)=-1$,切线斜率为 -1, …………………………… 2 分

所以所求切线方程为 $y-0=-(x-0)$,即 $x+y=0$. ………………………………………… 3 分

(2)法一:$f'(x)=e^x(2ae^x-2x-3)$,

令 $h(x)=2ae^x-2x-3$,

因为 $a<0$,所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; ………………………………………………… 4 分

又当 $x<0$ 时,$e^x<1$,$2ae^x>2a$,

所以 $h\left(\dfrac{2a-3}{2}\right)>2a-(2a-3)-3=0$,

又 $h(0)=2a-3<0$,

所以 $\exists x_0\in\left(\dfrac{2a-3}{2},0\right)$,使得 $h(x_0)=2ae^{x_0}-2x_0-3=0$. ………………………………… 6 分

所以 $e^{x_0}=\dfrac{2x_0+3}{2a}>0$,$a=\dfrac{2x_0+3}{2e^{x_0}}$,

因为 $a<0$,所以 $2x_0+3<0$,$x_0<-\dfrac{3}{2}$,由题意 $x_0>-2$. ………………………………… 8 分

故当 $x\in(-2,x_0)$ 时,$h(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

当 $x\in\left(x_0,-\dfrac{3}{2}\right)$ 时,$h(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值,$x_0\in\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$. ……………………………………………… 9 分

令 $m(x)=\dfrac{2x+3}{2e^x}$,$x\in\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$,则 $m'(x)=\dfrac{-2x-1}{2e^x}>0$,

所以 $m(x)$ 在 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递增, ………………………………………………………… 11 分

而 $m(-2)=\dfrac{-1}{2e^{-2}}=\dfrac{-e^2}{2}$,$m\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$,

所以$-\frac{e^2}{2}<a<0$,

故实数 a 的取值范围为$\left(-\frac{e^2}{2},0\right)$. ………………………………………………………… 12 分

法二:由题意,$f'(x)=e^x(2ae^x-2x-3)$在$(-2,+\infty)$上有零点,

即函数 $g(x)=2ae^x-2x-3$ 在$(-2,+\infty)$上有零点,

即方程 $2a=e^{-x}(2x+3)$在$(-2,+\infty)$上有实根. ………………………………………… 4 分

令 $h(x)=e^{-x}(2x+3)$,则 $h'(x)=e^{-x}(-2x-1)$.

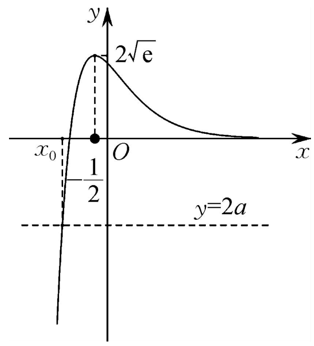
考虑到 $x>-2$,则 $h'(x)>0\Leftrightarrow-2<x<-\frac{1}{2}$;$h'(x)<0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$,

所以 $h(x)$在$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减,

所以 $x=-\frac{1}{2}$是 $h(x)$的最大值点,即 $h(x)_{\max}=h\left(-\frac{1}{2}\right)=2e^{\frac{1}{2}}$. ………………………………… 6 分

又 $h\left(-\frac{3}{2}\right)=0$,$h(-2)=-e^2$,当 $x\to+\infty$,$h(x)=e^{-x}(2x+3)\to0$,…………………………………… 7 分

函数 $y=h(x)(x>-2)$的图象见右图.



由题意,$h(-2)=-e^2<2a<0$,即$-\frac{e^2}{2}<a<0$. ………………………………………… 9 分

当$-\frac{e^2}{2}<a<0$ 时,设 $x_0\in\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$,使 $h(x_0)=2a$.

当$-2<x<x_0$ 时,$h(x)=e^{-x}(2x+3)<2a$,

即 $2ae^x-2x-3>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;

当 $x_0<x<-\frac{3}{2}$时,$h(x)=e^{-x}(2x+3)>2a$, $2ae^x-2x-3<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.

所以 $x_0\in\left(-2,-\frac{3}{2}\right)\subseteq(-2,+\infty)$,且 x_0 是 $f(x)$的极值点.

故所求实数 a 的取值范围是$\left(-\frac{e^2}{2},0\right)$. ………………………………………………………… 12 分

22.(1)解:设 $P(x,y)$,

由题意,得 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$,………………………………………………………………… 1 分

两边平方并整理,得 $y^2=2|x|+2x$.

故所求 C 的方程为 $y^2=2|x|+2x$. ……………………………………………………………… 3 分

(2)证明:C 的方程为 $y^2=2|x|+2x=\begin{cases}4x,x\geqslant0,\\0,x<0.\end{cases}$ ……………………………………………… 4 分

当直线 l 的斜率不存在时,点 A,B 关于 x 轴对称,存在 C 上的点 $P(x_0,0)(x_0\leqslant0)$,使 $k_{OP}=0$,$k_{PA}+k_{PB}=0$,显然直线 PA,OP,PB 的斜率成等差数列;…………………………………………………………………… 5 分

当直线 l 的斜率存在且不为 0 时,可设直线 l 的方程为 $x=my+1(m\neq0)$,

联立$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$消去 x,得 $y^2-4my-4=0$,$\Delta=16m^2+16>0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$. ………………………………………… 6 分

若存在点 $P(x_0,y_0)$满足条件,则 $2k_{OP}=k_{PA}+k_{PB}$,

即 $2\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}+\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}$,……………………………………………………………… 7 分

因为点 P,A,B 均在抛物线 $y^2=4x$ 上,所以 $x_0=\frac{y_0^2}{4}$,$x_1=\frac{y_1^2}{4}$,$x_2=\frac{y_2^2}{4}$.

所以$\frac{8}{y_0}=\frac{4(y_0-y_1)}{y_0^2-y_1^2}+\frac{4(y_0-y_2)}{y_0^2-y_2^2}=\frac{4}{y_0+y_1}+\frac{4}{y_0+y_2}=\frac{8y_0+4(y_1+y_2)}{y_0^2+(y_1+y_2)y_0+y_1y_2}$,

将 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$ 代入得

$\frac{8}{y_0}=\frac{8y_0+16m}{y_0^2+4my_0-4}$,整理得 $my_0-2=0$,………………………………………………… 9 分

因为 $m\neq0$,所以 $y_0=\frac{2}{m}$, ……………………………………………………………………… 10 分

代入 $y^2=4x$,得 $x_0=\frac{1}{m^2}$.

此时,存在 C 上的点 $P\left(\frac{1}{m^2},\frac{2}{m}\right)$,使得直线 PA,OP,PB 的斜率成等差数列. ……………… 11 分

综上,存在 C 上的点 P 使得直线 PA,OP,PB 的斜率成等差数列. ……………………………… 12 分