TOP20 三月联考(全国Ⅱ卷)

理科数学

注意事项:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分,测试时间 120 分钟.
5. 考试范围:高考全部内容.

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)已知集合 $A=\{x|2x-3\geqslant 0\}$, $B=\{x|x(x-2)<0\}$,则 $A\cap B=$

(A) $\{x|x\geqslant\frac{3}{2}\}$　　(B) $\{x|\frac{3}{2}\leqslant x<2\}$

(C) $\{x|0<x<2\}$　　(D) $\{x|0<x\leqslant\frac{3}{2}\}$

(2)设复数 z 满足 $\frac{2+\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}-1$,则 $|z|$ 等于

(A) $\frac{3}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) 2

(3)下列函数中,既是偶函数,又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

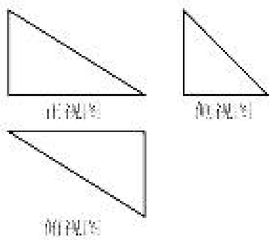
(A) $f(x)=1-x^2$　　(B) $f(x)=x-\frac{1}{x}$

(C) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x|$　　(D) $f(x)=2^{|x|}$

(4)已知双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$, F 为双曲线 C 的右焦点,过点 F 作与渐近线垂直的直线与另一条渐近线交于点 M,则 $|FM|=$

(A) $2\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $2\sqrt{2}$　　(D) 4

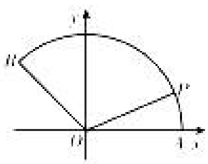
(5)如图所示,某几何体的三视图均为直角三角形,则围成该几何体的各面中,直角三角形的个数为



(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 4

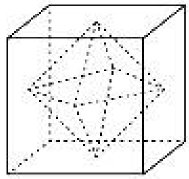
(6)如图,在平面直角坐标系 xOy 中,扇形 AOB 的圆心角为 $\frac{3\pi}{4}$,半径为 1. P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点,其横坐标为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\sin\angle BOP=$



(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$　　(D) $\frac{3+\sqrt{2}}{6}$

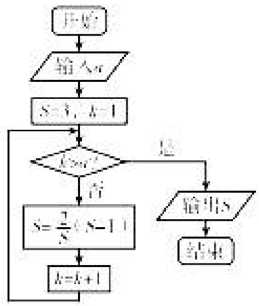
(7)正六面体有6个面，8个顶点；正八面体有8个面，6个顶点，我们称它们互相对偶。如图，连接正六面体各面的中心，就会得到对偶的正八面体，在正六面体内随机取一点，则此点取自正八面体内的概率是



(A)$\frac{1}{6}$　　(B)$\frac{1}{5}$

(C)$\frac{1}{4}$　　(D)$\frac{1}{3}$

(8)执行如图所示的程序框图，若输出 S 的值为$\frac{4}{3}$，则输入 a 的值可能为



(A)4

(B)10

(C)79

(D)93

(9)设 x、y 满足不等式组$\begin{cases}x+y\leqslant 2,\\ y\leqslant x+a,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$且$\frac{y}{x+4}$的最大值为$\frac{1}{2}$，则实数 a 的值为

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

(10)设 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta=\frac{1}{\cos\beta}$，则

(A)$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　(B)$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

(C)$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$　　(D)$\alpha-2\beta=\frac{\pi}{2}$

(11)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，点 A、B 是椭圆 C 上关于原点 O 对称的两个点，且 $|AO|=|AF|$，$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，则椭圆 C 的离心率为

(A)$\sqrt{3}-1$　　(B)$2-\sqrt{3}$

(C)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D)$\frac{\sqrt{2}}{3}$

(12)若函数 $f(x)=a\ln x-e^x$ 有极值点，则实数 a 的取值范围是

(A)$(-e,+\infty)$　　(B)$(1,e)$

(C)$(1,+\infty)$　　(D)$(0,+\infty)$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分．第13题～第21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22题～第23题为选考题，考生根据要求作答．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分．

(13)$(x^2+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中含 x^3 项的系数是________（用数字作答）．

(14)甲、乙、丙、丁4人站在一栋房子前，甲说："我没进过房子"；乙说："丙进去过"；丙说："丁进去过"；丁说："我没进过房子"，这四人中只有一人进过房子，且只有一人说了真话，则进过这栋房子的人是________．

(15)在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$AB=3$，$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{4}{3}$，则 $AC=$________．

(16)$\triangle ABC$的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $b+c=a(\cos B+\cos C)$，若$\triangle ABC$的周长的最大值为 $4+4\sqrt{2}$，则 $a=$________．

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(17)(本小题满分 12 分)

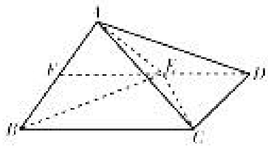
已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{3}$，$\frac{a_n}{a_{n+1}}=2a_n+1$（$n\in N^*$ 且 $n\geq2$）.

（Ⅰ）证明：$\{\frac{1}{a_n}\}$为等差数列；

（Ⅱ）求数列$\{\frac{3^n}{a_n}\}$的前 n 项和 T_n.

(18)(本小题满分 12 分)

如图，四棱锥 $A-BCDE$ 中，底面 $BCDE$ 为直角梯形，$ED\parallel BC$，$\angle EDC=90^\circ$，$EB=EC=2\sqrt{2}$，$AB=AE=ED=2$，F 为 AB 的中点.



（Ⅰ）证明：$EF\parallel$平面 ACD；

（Ⅱ）若 $AC=2\sqrt{3}$，求直线 BC 与平面 ACD 所成角的正弦值.

(19)(本小题满分 12 分)

近几年，我国鲜切花产业得到了快速发展，相关部门制定了鲜切花产品行业等级标准，统一使用综合指标值 FL 进行衡量，如下表所示. 某花卉生产基地准备购进一套新型的生产线，现进行设备试用，分别从新旧两条生产线加工的产品中选取 30 个样品进行等级评定，整理成如图所示的茎叶图.

旧生产线		新生产线
6 5 5 4 0	1	0 2 2
7 7 5 5 5 5 5 3 2 0	2	1 2 2 3 3 5 5
5 4 0 0 0 0 0	3	0 0 1 1 3 5 8 8 9
7 6 4 2 1	4	0 0 2 5 5
2 2 0	5	0 4 5 6 8 8

综合指标 FL	[10,19]	[20,39]	[40,59]
质量等级	三级	二级	一级

（Ⅰ）根据茎叶图比较两条生产线加工的产品的综合指标值的平均值及分散程度（直接给出结论即可）；

（Ⅱ）若从等级为三级的样品中随机选取 3 个进行生产流程调查，其中来自新型生产线的样品个数为 X，求 X 的分布列；

（Ⅲ）根据该花卉生产基地的生产记录，原有生产线加工的产品的单件平均利润为 4 元，产品的销售率（某等级产品的销量与产量的比值）及产品售价如下表：

	三级花	二级花	一级花
销售率	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$
单件售价	12 元	16 元	20 元

预计该新型生产线加工的鲜切花单件产品的成本为 10 元，日产量 3000 件. 因为鲜切花产品的保鲜特点，未售出的产品统一按原售价的 50%全部处理完. 如果仅从单件产品利润的角度考虑，该生产基地是否需要引进该新型生产线？

(20)(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C:x^2=4y$,直线 $l:y=kx+1$ 与抛物线交于 A,B 两点.

(Ⅰ)若 $k=\frac{1}{2}$,求以 AB 为直径的圆被 x 轴所截得的弦长;

(Ⅱ)分别过点 A,B 作抛物线 C 的切线,两条切线交于点 E,求△EAB 面积的最小值.

(21)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^{-x}-ax$.

(Ⅰ)若 $a=-\frac{1}{2}$,讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)若方程 $f(x)+x=0$ 没有实数解,求实数 a 的取值范围.

请考生从第 22、23 题中任选一题作答,并用 2B 铅笔将答题卡上所选题目对应的题号右侧方框涂黑,按所选涂题号进行评分;多涂、多答,按所涂的首题进行评分;不涂,按本选考题的首题进行评分.

(22)(本小题满分 10 分)【选修 4—4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数). 以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 $C_1:\rho=2$ 与 x 轴的正、负半轴分别交于 A,B 两点.

(Ⅰ)P 为 C_1 上的动点,求线段 AP 中点的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

(Ⅱ)直线 l 与 C_2 分别交于点 M,N,且 M 在 N 的左侧,△BMO 的面积是△NMO 面积的 2 倍,求 $\tan\alpha$ 的值.

(23)(本小题满分 10 分)【选修 4—5:不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|x-a|-x^2$.

(Ⅰ)若 $a=1$,求不等式 $f(x)\geq 1$ 的解集;

(Ⅱ)若不等式 $f(x)<2(1-x^2)$ 至少有一个负数解,求实数 a 的取值范围.

TOP20 三月联考(全国Ⅱ卷)

理科数学　　参考答案

本试卷防伪处为：

(3)下列函数中，

(22)在平面直角坐标系 xOy 中

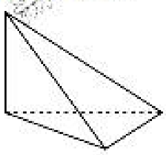
1. B 【解析】$A=\{x|x\geqslant\frac{3}{2}\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，所以 $A\cap B=\{x|\frac{3}{2}\leqslant x<2\}$.

2. B 【解析】因为 $z=\frac{i+2}{i-1}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$，所以 $\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，$|z|=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

3. D 【解析】A 选项在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；B 选项为奇函数，C 选项在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，D 选项满足题意.

4. A 【解析】由题意可知，双曲线 C 的一条渐近线为 $y=\sqrt{3}x$，则过点 F 作与渐近线垂直的直线方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，与 $y=-\sqrt{3}x$ 联立得 $x=-1$，$y=\sqrt{3}$，故 $M(-1,\sqrt{3})$，又 $F(2,0)$，则 $|FM|=2\sqrt{3}$.

5. D 【解析】该几何体的直观图如图所示，则该几何体的各面中，直角三角形的个数为 4 个.



6. C 【解析】由题意可知 $P(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3})$，根据三角函数的定义 $\sin\angle POA=\frac{1}{3}$，$\cos\angle POA=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $\sin\angle BOP=\sin(\frac{3\pi}{4}-\angle POA)=\sin\frac{3\pi}{4}\cos\angle POA-\cos\frac{3\pi}{4}\sin\angle POA=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-(-\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{1}{3}=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

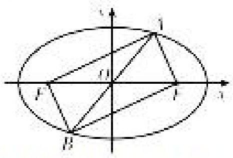
7. A 【解析】设正方体的棱长为 2，则正方体的体积 $V_1=8$，正八面体是由两个全等的正四棱锥组成，且棱长为 $\sqrt{2}$，正四棱锥的底面积为 2，高为 1，体积为 $\frac{1}{3}\times2\times1=\frac{2}{3}$，则正八面体的体积 $V_2=\frac{4}{3}$，则此点取自正八面体内的概率 $P=\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{4}{3}}{8}=\frac{1}{6}$.

8. D 【解析】程序运行如下：$S=3,k=1$；$S=\frac{4}{3},k=2$；$S=\frac{1}{2},k=3$；$S=-2,k=4$；$S=3,k=5$；…，此程序的 S 值 4 个一循环. 若输出 S 的值为 $\frac{4}{3}$，则相应 k 的值为 $4k_1+2(k_1\in N)$，因为 $k>a$ 时，输出 S，则输入 a 的值为 $4k_1+1(k_1\in N)$.

9. B 【解析】结合可行域可知 $a\geqslant-2$，$\frac{y}{x+4}$ 表示可行域内的点 $P(x,y)$ 与点 $Q(-4,0)$ 连线的斜率，直线 $x+y-2=0$ 与直线 $y=x+a$ 的交点为点 $A(1-\frac{a}{2},1+\frac{a}{2})$，当 $x=1-\frac{a}{2}$，$y=1+\frac{a}{2}$ 时，$\frac{y}{x+4}$ 取到最大值 $\frac{1}{2}$，即 $\frac{1+\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}+4}=\frac{1}{2}$，解得 $a=2$，所以实数 a 的值为 2.

10. B 【解析】由题意可知 $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\beta}$，等式两边同时乘以 $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta$ 得，$\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$，则 $\sin\alpha=\cos(\alpha-\beta)$，$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\alpha-\beta)$，因为 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}-\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}-\alpha=\alpha-\beta$，所以 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

11. A 【解析】因为 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，所以 $\angle AFB=90°$，因为 $|AO|=|AF|$，所以 $|AB|=2|AF|$，故 $\angle ABF=30°$，设椭圆 C 的左焦点为 F_1，根据椭圆的性质，四边形 AF_1BF 为平行四边形，且 $\angle AFB=90°$，所以四边形 AF_1BF 为矩形，在直角三角形 AF_1F 中，$\angle AF_1F=30°$，$|AF_1|=\sqrt{3}c$，$|AF|=c$，根据椭圆的定义，$|AF_1|+|AF|=2a$，即 $\sqrt{3}c+c=2a$，则椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}-1$.



12. D 【解析】由题意知 $f(x)=a\ln x-e^x(x>0)$,

$f'(x)=\frac{a}{x}-e^x$，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无极值点；当 $a>0$ 时，根据 $y=\frac{a}{x}$ 与 $y=e^x$ 的图象，设两个函数在第一象限的交点的横坐标为 x_0，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\frac{a}{x}>e^x$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\frac{a}{x}<e^x$，$f'(x)=\frac{a}{x}-e^x<0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，故当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个极大值点.

13. 20 【解析】$(x^2+\frac{1}{x})^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(x^2)^{6-r}\cdot(\frac{1}{x})^r=C_6^r\cdot x^{12-3r}$，令 $12-3r=3$，得 $r=3$，因此展开式中含 x^3 项的系数是 $C_6^3=20$.

14. 甲 【解析】由丙、丁的说法知道丙与丁中有一个人说的是真话，若丙说了真话，则甲必是假话，矛盾；若丁说了真话，则甲说的是假话，甲就是进过房子的那个人.

15. 2 【解析】$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}^2=-\frac{4}{3}$，设 $AC=x$，则 $-3-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2=-\frac{4}{3}$，解得 $x=2$.

16. 4 【解析】因为 $b+c=a(\cos B+\cos C)$，根据余弦定理可得 $\frac{b+c}{a}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得 $2b^2c+2bc^2=a^2b+bc^2-b^3+a^2c+b^2c-c^3$，即 $b^2c+bc^2=a^2b+a^2c-(b^3+c^3)$，因式分解得 $(b+c)(b^2+c^2-a^2)=0$，所以 $b^2+c^2=a^2$，即 $\angle BAC=90°$，$\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c=a+a\sin B+a\cos B=a[1+\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})]\leqslant a(1+\sqrt{2})=4+4\sqrt{2}$，当 $\angle B=\frac{\pi}{4}$ 时，取等号，则 $a=4$.

17. 【解析】(Ⅰ)因为 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=2a_n+1$，

所以 $a_n=a_{n+1}+2a_na_{n+1}$，

即 $a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，等式两边同时除以 a_na_{n+1}，

得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2(n\geqslant 2)$，且 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=2$，

所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为首项为 1，公差为 2 的等差数列.

…………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $\frac{1}{a_n}=2n-1$，$\frac{3^n}{a_n}=(2n-1)3^n$， ……

…………………………………………………… 6 分

则 $T_n=1\times3+3\times3^2+\cdots+(2n-1)3^n$ ①，

$3T_n=1\times3^2+\cdots+(2n-3)3^n+(2n-1)3^{n+1}$ ②，

①－②得：$-2T_n=3+2(3^2+\cdots+3^n)-(2n-1)3^{n+1}=3+2\times\frac{9(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)3^{n+1}$

$=2(1-n)3^{n+1}-6$，

故 $T_n=(n-1)3^{n+1}+3$. ………………………… 12 分

18. 【解析】(Ⅰ)作 BC 中点 G，连接 FG，EG，

所以 $ED=GC$，又因为 $ED/\!/GC$，

所以四边形 $EGCD$ 为平行四边形，

故 $EG/\!/CD$，则 $EG/\!/$平面 ACD，

又因为 F 为 AB 的中点

故 $FG/\!/AC$，则 $FG/\!/$平面 ACD，

又 $FG\cap EG=G$，所以平面 $FEG/\!/$平面 ACD，

因为 $EF\subset$平面 FEG，

所以 $EF/\!/$平面 ACD. ………………………… 4 分

(Ⅱ)因为 $ED/\!/BC$，$\angle EDC=90°$，

$EB=EC=2\sqrt{2}$，$ED=2$，

所以 $BC=2ED=2DC=4$，

所以 $BE\perp EC$，

又因为 $AB=AE=2$，所以 $BE^2=AB^2+AE^2$，

所以 $BA\perp AE$，

作 BE 中点 H，连接 AH，HC，

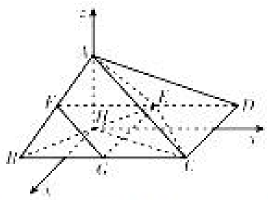
$AH=\sqrt{2}$，$HC=\sqrt{10}$，又因为 $AC=2\sqrt{3}$，

所以 $AC^2=AH^2+HC^2$，

即 $AH\perp HC$，又 $AH\perp BE$，

所以 $AH\perp$平面 $BCDE$. ………………………… 8 分

以 H 为坐标原点，以过点 H 且平行于 CD 的直线为 x 轴，以过点 H 且平行于 BC 的直线为 y 轴，HA 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



可得 $C(1,3,0)$，$D(-1,3,0)$，$A(0,0,\sqrt{2})$，$B(1,-1,0)$，

$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{CA}=(-1,-3,\sqrt{2})$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ACD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x=0,\\ -x-3y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

可得 $n=(0,\frac{2}{3},\sqrt{2})$,

直线 BC 的方向向量 $a=(0,1,0)$, ……… 10 分

设 BC 与平面 ACD 所成角为 α,

则 $\sin\alpha=|\cos\langle n,a\rangle|=\frac{n\cdot a}{|n|\cdot|a|}=\frac{\sqrt{22}}{11}$,

综上,直线 BC 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$. ………………………………………… 12 分

19.【解析】(Ⅰ)由茎叶图可以看出,新型生产线综合指标值的平均值高于旧生产线的平均值;旧生产线的综合指标值相对于新型生产线来说更为集中. ………………………………………………… 2 分

(Ⅱ)由题意可知,等级为三级的样品共有 8 个,其中来自旧生产线的 5 个,新生产线的 3 个,

随机变量 X 的取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}$, $P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$,

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$, $P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$,

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

……………………………………………………… 6 分

(Ⅲ)由茎叶图可知,该新型生产线加工的产品为三等品的概率 $P_1=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$,

二等品的概率 $P_2=\frac{16}{30}$,一等品的概率 $P_3=\frac{11}{30}$,

故 3000 件产品中,三等品、二等品、一等品的件数的估计值分别为 300 件,1600 件,1100 件,

三等品日销售总利润为 $300\times\frac{2}{5}\times2-300\times\frac{3}{5}\times4=-480$(元),

二等品日销售总利润为 $1600\times\frac{2}{3}\times6-1600\times\frac{1}{3}\times2=\frac{16000}{3}$(元),

一等品日销售总利润为 $1100\times\frac{8}{9}\times10=\frac{88000}{9}$(元),

$\therefore(-480+\frac{16000}{3}+\frac{88000}{9})\div3000\approx4.88$(元),

故产品的单件平均利润的估计值为 4.88 元,高于 4 元,

综上,该生产基地需要引进该新型生产线. …… ……………………………………………………… 12 分

20.【解析】设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+1\end{cases}$ 联立得: $x^2-4kx-4=0$,

$x_1+x_2=4k$, $x_1x_2=-4$,

(Ⅰ)当 $k=\frac{1}{2}$ 时, $x_1+x_2=2$, $\therefore y_1+y_2=3$,

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}\cdot\sqrt{2^2-4\times(-4)}=5$, ……… 2 分

设 AB 的中点为 M,则 $M(1,\frac{3}{2})$,

$\therefore$ 以 AB 为直径的圆被 x 轴所截得的弦长为

$m=2\sqrt{(\frac{5}{2})^2-(\frac{3}{2})^2}=4$. ………………… 4 分

(Ⅱ)对 $y=\frac{x^2}{4}$ 求导,得 $y'=\frac{x}{2}$,即 $k_{AE}=\frac{x_1}{2}$,

直线 AE 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$,

即 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{1}{4}x_1^2$,

同理,直线 BE 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{1}{4}x_2^2$,

设 $E(x_0,y_0)$,联立 AE 与 BE 的方程,

解得 $\begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2k,\\y_0=\frac{x_1x_2}{4}=-1,\end{cases}$ 即 $E(2k,-1)$, …… 8 分

点 E 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|2k^2+2|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{1+k^2}$,

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(4k)^2+16}=4(k^2+1)$,

所以 $\triangle ABE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times4(k^2+1)\times2\sqrt{1+k^2}=4(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\geq4$,

当且仅当 $k=0$ 时取等号,

综上, $\triangle ABE$ 面积的最小值为 4. ………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)当 $a=-\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}x$,函数的定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $f'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{2}=\frac{e^x-2}{2e^x}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln2$, ……………………… 2 分

又因为函数 $y=e^x-2$ 单调递增,

所以在 $(-\infty,\ln2)$ 上, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;

在 $(\ln2,+\infty)$ 上, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增. …… ……………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)方程 $f(x)+x=0$ 没有实数解,

即方程 $e^{-x}+(1-a)x=0$ 没有实数解,

设函数 $g(x)=e^{-x}+(1-a)x$,

$g'(x)=-e^{-x}+(1-a)=\frac{(1-a)e^x-1}{e^x}$,

①当 $a=1$ 时，$g(x)=e^{-x}>0$，函数 $g(x)$ 没有零点；…………………………………… 6 分

②当 $a>1$ 时，函数 $g(x)$ 单调递减，$g(\frac{1}{a-1})=e^{\frac{1}{1-a}}-1<0$，且 $g(0)=1>0$，函数 $g(x)$ 有零点；…………………………………… 8 分

③当 $a<1$ 时，令 $g'(x)=\frac{(1-a)e^x-1}{e^x}=0$，则 $x=-\ln(1-a)$，

当 $x\in(-\infty,-\ln(1-a))$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(-\ln(1-a),+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；…………………………………… 10 分

当 $x=-\ln(1-a)$ 时，$g(x)_{\min}=g(-\ln(1-a))=(1-a)(1-\ln(1-a))$，

令 $(1-a)(1-\ln(1-a))>0$，得 $1-e<a<1$，

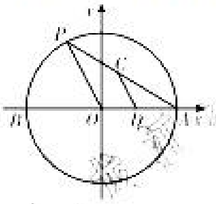
即函数 $g(x)$ 没有零点，

综上所述，若函数 $g(x)$ 没有零点，

即方程 $e^{-x}+(1-a)x=0$ 没有实数解，

故实数 a 的取值范围为 $(1-e,1]$。 ……… 12 分

22.【解析】(Ⅰ) 如图，设 AP 的中点 C，OA 的中点 D，



$|DC|=\frac{1}{2}|OP|=1$，

所以点 C 的轨迹是以 $D(1,0)$ 为圆心，1 为半径的圆，

其轨迹 C_2 的直角坐标方程为：$x^2+y^2-2x=0$。

…………………………………… 5 分

(Ⅱ) 把 $\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2-2x=0$，

整理得 $t^2-6\cos\alpha t+8=0$，$B(-2,0)$，

设点 M、N 所对应的参数分别为 t_1，t_2，

$t_1+t_2=6\cos\alpha$①，$t_1t_2=8$②，

因为 $S_{\triangle BMO}=2S_{\triangle NMO}$，则 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MN}$，

即 $t_2=\frac{3}{2}t_1$③。 …………………………………… 8 分

联立①②③得 $\cos^2\alpha=\frac{25}{27}$，$\sin^2\alpha=\frac{2}{27}$，

故 $\tan^2\alpha=\frac{2}{25}$，所以 $\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{5}$。 ………… 10 分

23.【解析】(Ⅰ) 若 $a=1$，则不等式 $f(x)\geqslant 1$ 化为 $|x-1|-x^2\geqslant 1$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$x-1-x^2\geqslant 1$，即 $x^2-x+2\leqslant 0$，无解；

当 $x<1$ 时，$1-x-x^2\geqslant 1$，

即 $x^2+x\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$，

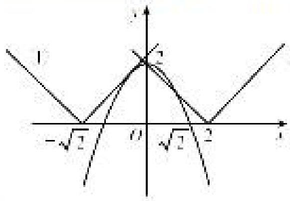
综上，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0\}$。

…………………………………… 5 分

(Ⅱ) $f(x)<2(1-x^2)$，即 $|x-a|-x^2<2(1-x^2)$，化为 $|x-a|<2-x^2$，

设 $g(x)=|x-a|$，$h(x)=2-x^2$，

当 $a<0$ 时，$g(x)$ 的图象如折线①所示，



由 $\begin{cases}y=x-a\\ y=2-x^2\end{cases}$ 得 $x^2+x-a-2=0$，

若相切，则 $\Delta=1+4(a+2)=0$，得 $a=-\frac{9}{4}$，

数形结合知，当 $a\leqslant-\frac{9}{4}$ 时，不等式无负数解，

则 $-\frac{9}{4}<a<0$，

当 $a=0$ 时，满足 $f(x)<2(1-x^2)$ 至少有一个负数解，

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 的图象如折线②所示，

此时当 $a=2$ 时恰好无负数解，

当 $a\geqslant 2$ 时，不等式无负数解，则 $0<a<2$，

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\frac{9}{4},2)$。 ……

…………………………………… 10 分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2020 届高三上学期期末考试试题答案汇总（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/202001/41635.html