2017年全国高中数学联赛江西省预赛试题及参考答案

一、填空题

1、化简 $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2016\sqrt{2017}+2017\sqrt{2016}}=\underline{1-\frac{1}{\sqrt{2017}}}$.

解：由 $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}.(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 可得.

2、若 sinx+cosx=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin^3 x+\cos^3 x=\underline{\frac{5\sqrt{2}}{8}}$.

解：$\sin x\cos x=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}=-\frac{1}{4}$，

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

3、体积为 1 的正四面体被放置于一个正方体中，则此正方体体积的最小值是__3___.

解：反向考虑，边长为 a 的正方体（体积为 a^3），其最大内接正四面体顶点，由互不共棱的正方体顶点组成，其体积为 $\frac{a^3}{3}$，令 $\frac{a^3}{3}=1$，则 $a^3=3$.

4、若椭圆的一个顶点关于它的一个焦点的对称点恰好在其准线上，则椭圆的离心率 $e=\underline{\frac{1}{2}\text{或}\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

解：建立坐标系，设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则顶点 $A_{1,2}=(\pm a,0),B_{1,2}=(\pm b,0)$，焦点 $F_{1,2}=(\pm c,0)$，准线方程为 $l_{1,2}=\pm\frac{a^2}{c}$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，据对称性，只要考虑两种情况：（1）、$A_1(-a,0)$ 关于 $F_2(c,0)$ 的对称点在右准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上，由 $-a+\frac{a^2}{c}=2c$，得 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$；（2）、$B_1(0,b)$ 关于 $F_2(c,0)$ 的对称点在右准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上，由横坐标 $0+\frac{a^2}{c}=2c$，得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5、函数 $y=-4x+3\sqrt{4x^2+1}$ 的最小值是 $\underline{\sqrt{5}}$.

解：首先，$y>-4x+3\sqrt{4x^2+1}=-4x+|6x|\ge 0$. 又由 $(y+4x)^2=9(4x^2+1)$，即 $20x^2-8xy+(9-y^2)=0$，据判别式 $\Delta=64y^2-80(9-y^2)\ge 0$，即 $y^2\ge 5$，因 y>0，则 $y\ge\sqrt{5}$，此值在

$x=\frac{1}{\sqrt{5}}$时取得.（也可以令$x=\frac{1}{2}\tan\theta$求解）.

6、设$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$，则$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{3^n-1}{2}$.

解：令 x=0，得 $a_0=1$, 再令 x=1，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=3^n$,又令 x=−1，得 $a_0-a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=1$，所以

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{3^n-1}{2}$.

7、将全体真分数排成这样的一个数列$\{a_n\}$：$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\cdots$，排序方法是：自左至右，先将分母按自小到大排列，对于分母相同的分数，再按分子自小到大排列，则其第 2017 项$a_{2017}=\frac{1}{65}$.

解：按分母分段，分母为 k+1 的分数有 k 个，因$\frac{63\times64}{2}=2016,\frac{64\times65}{2}=2080$，因 2017 属于第 64 段，则$a_{2017}$应是分母为 65 的第一数，即$\frac{1}{65}$.

8、将各位数字和为 10 的全体正整数按自小到大的顺序排成一个数列$\{a_n\}$，若$a_n=2017$，则 n=120.

解：数字和为 10 的两位数$\overline{ab}$有 9 个；数字和为 10 的三位数$\overline{abc}$：首位数字 a 可取 1，2，…，9 中任意一个值，当 a 取定后，b 可取 0，1，…，10−a 这 11−a 个数字的任意一个值，而在 a, b 确定后，c 的值就唯一确定，因此三位数的个数是$\sum_{a=1}^{9}(11-a)=54$；数字和为 10 的四位数$\overline{1abc}$：a+b+c=9 的非负整数解（a, b, c）的个数是$C_{11}^2=55$，数字和为 10 的四位数$\overline{2abc}$共有 2 个即 2008 和 2017，故在 1，2，…，2017 中，满足条件的数有 9+54+55+2=120 个.

二、解答题（共 70 分）

9、（本题满分 15 分）数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：$a_1=b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n(n\geq1)$.

证明：（1）、$\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}<\sqrt{2}$，$\frac{a_{2n}}{b_{2n}}>\sqrt{2}$；（2）、$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\sqrt{2}\right|<\left|\frac{a_n}{b_n}-\sqrt{2}\right|$.

证明：$a_{n+1}^2-2b_{n+1}^2=(a_n+2b_n)^2-2(a_n+b_n)^2=-(a_n^2-2b_n^2)$ … ① 由此递推得

$a_n^2-2b_n^2=(a_{n-1}+2b_{n-1})^2-2(a_{n-1}+b_{n-1})^2=-(a_{n-1}^2-2b_{n-1}^2)=\cdots=(-1)^{n-1}(a_1^2-2b_1^2)=(-1)^n$ …②

因此$a_{2n}^2-2b_{2n}^2>0,a_{2n-1}^2-2b_{2n-1}^2<0$即有$\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}<\sqrt{2},\frac{a_{2n}}{b_{2n}}>\sqrt{2},$

据①得$\left|a_{n+1}^2-2b_{n+1}^2\right|=\left|a_n^2-2b_n^2\right|$…③，由条件知，$\{a_n\},\{b_{n,}\}$皆为严格递增的正整数数列，

$a_{n+1}>a_n>0,b_{n+1}>b_n>0,$所以$\frac{1}{a_{n+1}+\sqrt{2}b_{n+1}}<\frac{1}{a_n+\sqrt{2}b_n}$…④$\frac{1}{b_{n+1}}<\frac{1}{b_n}$…⑤

将③④⑤相乘得$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\sqrt{2}\right|<\left|\frac{a_n}{b_n}-\sqrt{2}\right|$

10、（本题满分 15 分）若小于 2017 的三个互异正整数a，b，c使得a^3-b^3，b^3-c^3，c^3-a^3均是 2017 的倍数；证明：$a^2+b^2+c^2$必是$a+b+c$的倍数.

证：因$2017\left|(a^3-b^3),\text{即}2017\right|(a-b)(a^2+ab+b^2)$；又由$0<|a-b|<2017,$注意 2017 为质数，则 a-b 与 2017 互质，因此$2017|(a^2+b^2+ab)$…①同理有$2017|(b^2+c^2+bc)$…② $2017|(a^2+c^2+ac)$…③，根据②③，$2017|[(a^2+c^2+ac)-(b^2+c^2+bc)]$，即 $2017|(a-b)(a+b+c)$，从而$2017|(a+b+c)$，因正整数 a,b,c 皆小于 2017，得 a+b+c<3*2017,因此 a+b+c=2017 或 2*2017.又注意$a+b+c$与$a^2+b^2+c^2$同奇偶，故只要证$2017|(a^2+b^2+c^2)$，将①改写为 $2017|[a(a+b+c)+b^2-ac)],$则知$2017|(b^2-ac)$…④，同理有$2017|(a^2-bc)$，$2017|(c^2-ab)$…⑤，将①②③④⑤式相加，得$2017|3(a^2+b^2+c^2)$于是$2017|(a^2+b^2+c^2)$，从而$(a+b+c)|(a^2+b^2+c^2)$.

11、（本题满分 20 分）设P=｛1^2，2^2，3^2，⋯｝是由全体正整数的平方所构成的集合；如果数n能够表示为集合P中若干个（至少一个）互异元素的代数和，则称数n具有P结构．证明：每个自然数n都具有P结构．

证明：首先，我们可以将前十个自然数分别表示为：

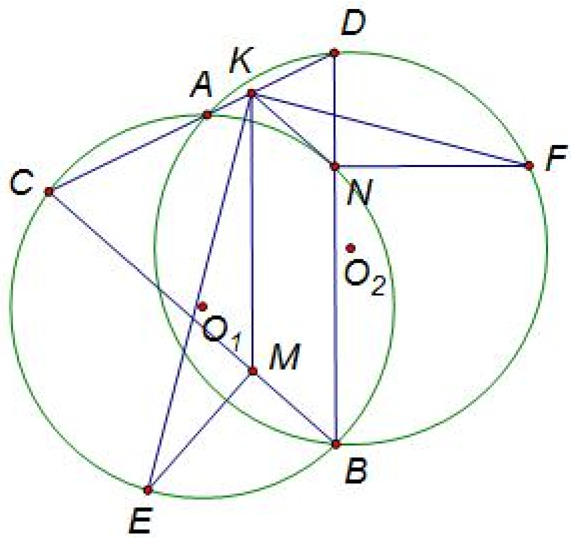
$0=-3^2-4^2+5^2,1=1^2,2=-1^2-2^2-3^2+4^2,3=-1^2+2^2,4=2^2$

$5=1^2+2^2,6=-1^2-3^2+4^2,7=-3^2+4^2,8=-1^2+3^2,9=3^2$

再考虑区间$\left(3^2,4^2\right]$中的数，其中除了 $16=4^2$ 之外，其余的数皆可表示为$n=4^2-k(1\le k\le 6)$形式；并且注意到，在 1，2，3，4，5，6 中每个数的 p 结构表示中，凡是表示式中 4^2 参与时，4^2 皆以正项形式出现，于是由$n=4^2-k(1\le k\le 6)$可知，此时 4^2 项便抵消（不会出现2×4^2的项)；因此，区间$\left(3^2,4^2\right]$中的数皆具有 P 结构表示，也就是$\le 4^2$的每个数都具有 P 结构表示，且其中最大项至多为 4^2，而凡是含有 4^2 的

表示中，4² 皆以正项形式出现，下面使用归纳法，假若已证得$\le m^2$的每个数都具有 P 结构表示，且其中最大项至多为m^2，而凡是含有m^2表示中，m^2皆以正项形式出现（其中$m\ge 4$），对于区间$\left(m^2,(m+1)^2\right]$中的数，除了最大数可以直接表示为$(m+1)^2$之外，其余元素 n 皆可表示为：$n=(m+1)^2-k(1\le k\le 2m)$，由归纳假设，$m\ge 4,且2m<m^2$，并且此 k 具有 P 结构表示，其中每项皆$\le m^2$，因此数 n 具有 P 结构表示，故由归纳法，即知所证的结论成立.

12、（本题满分 20 分）如图，$\odot O_1$，$\odot O_2$相交于A，B两点，CD是经过点A的一条线段，其中，点C，D分别在$\odot O_1$、$\odot O_2$上，过线段CD上的任意一点K，作$KM\,//\,BD$，$KN\,//\,BC$，点M，N分别在BC，BD上，又向ΔBCD形外方向，作$ME\perp BC$，$BF\perp BD$，其中E在$\odot O_1$上，F在$\odot O_2$上；证明：$KE\perp KF$.



证明：设$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为r_1,r_2，由于 ABEC 共圆，ABFD 共圆，得$BC=2r_1 sim\angle BAC, BD=2r_2\sin\angle BAD,$

而$\angle BAC+\angle BAD=180^\circ$,所以$\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{r_1}{r_2}$,于是

$\Delta BO_1C\backsim\Delta BO_2D$，根据平行关系得

$\Delta CMK\backsim\Delta KND\backsim\Delta CBD$, 所以

$\dfrac{MC}{MK}=\dfrac{NK}{ND}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{r_1}{r_2}$,且四边形$KMBN$为平行四边形，

BN=MK, 延长垂线 FN 交$\odot O_2$于F_1, 因$\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{r_1}{r_2}$, 则$\odot O_1$上优弧 BEC 与$\odot O_2$上 BD 所对的优弧$DF_1B$的度数相等，又因 M, N 分别是两圆对应弦 CB、BD 上的点，且

$\dfrac{CM}{BN}=\dfrac{CM}{MK}=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{r_1}{r_2}$,所以⊿CME∽⊿N$F_1$B, ⊿BME∽⊿N$F_1$D, 从而⊿BEC∽⊿D$F_1$B, 由⊿BEM∽⊿N$F_1$D

∽ΔFBN，得$\dfrac{EM}{BM}=\dfrac{BN}{FN}$，注意 BM=KN, BN=KM, 上式成为$\dfrac{EM}{KN}=\dfrac{KM}{FN}$，根据⊿CMK∽⊿KND, 得

$\angle CMK=\angle KND,而\angle EMC=\angle FND=90^\circ,所以\angle CMK=\angle KNF,\therefore \Delta EMK\backsim\Delta FNK$,

而$EM\perp BC, FN\perp BD,$又据条件$KM\,//\,BD, KN\,//\,BC,$所以$EM\lozenge KN, FN\perp KM,$由此$KE\perp KF.$