

2023 年春期六校第二次联考

高二年级数学试题

命题学校:方城一高

(考试时间:120 分钟)

试卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

1. 下列求导正确的是

- A. $(\sin x)' = -\cos x$ B. $(\ln 3)' = \frac{1}{3}$ C. $(2^x)' = x \cdot 2^{x-1}$ D. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

2. 抛物线 $C: x^2 = 4ay$ 过点 $(-2, 1)$, 则 C 的准线方程为

- A. $y = 1$ B. $y = -1$ C. $x = 1$ D. $x = -1$

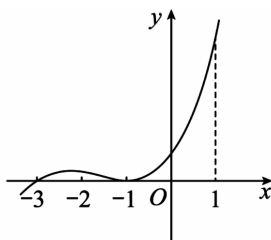
3. 若平面内两条平行线 $l_1: x + (a-1)y + 2 = 0$, $l_2: ax + 2y + 1 = 0$ 间的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 则实数 $a =$

- A. 2 B. -2 或 1 C. -1 D. -1 或 2

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 a_3 = 4$, $a_9 = 256$, 则 a_7 等于

- A. 128 B. 128 或 -128 C. 64 或 -64 D. 64

5. 函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的大致图象如下图所示, 则



- A. -3 是函数 $y = f(x)$ 的极大值点
B. $y = f(x)$ 在区间 $(-3, 1)$ 上单调递增
C. -1 是函数 $y = f(x)$ 的最小值点
D. $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线的斜率小于零

6. 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(0) = 2$, $f'(x) < f(x)$, 则不等式 $f(x) < 2e^x$ 的解集为

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

7. 有一些网络新词,如“yyds”“内卷”“躺平”等,现定义方程 $f(x) = f'(x)$ 的实数根 x 叫做函数 $f(x)$ 的“躺平点”,若函数 $g(x) = e^x - x, h(x) = \ln x, \varphi(x) = 1024x + 1024$ 的躺平点分别为 a, b, c ,则 a, b, c 的大小关系为

- A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 ,设 P 为椭圆上一点,在 $\triangle F_1PF_2$ 中,顶点 P 处的外角平分线所在直线为 l ,过点 F_1, F_2 分别做 l 的垂线,垂足分别为 R, S ,当点 P 在椭圆上运动时,点 S 的轨迹所围成的图形的面积为

- A. a^2 B. $4a^2$ C. πa^2 D. $4\pi a^2$

二、选择题(本题共4个小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项是符合题目要求的,全部选对得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.)

9. 已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$,则

- A. 若 $m = n > 0$,则曲线 C 是圆,其半径为 $\sqrt{n}$
 B. 若 $m > n > 0$,则曲线 C 是椭圆,其焦点在 y 轴上
 C. 若曲线 C 过点 $(-\sqrt{2}, \sqrt{3}), (-\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{2})$,则 C 是双曲线
 D. 若 $mn = 0$,则曲线 C 不表示任何图形

10. 已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$,其前 n 项和为 S_n ,且 $S_9 > 0, S_{10} < 0$,则下列结论正确的为

- A. $\{a_n\}$ 为递增数列
 B. $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列
 C. 当 S_n 取得最大值时, $n = 6$
 D. 当 $a_1 = 2$ 时, d 的取值范围为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{9})$

11. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$,记 $g(x) = f'(x)$,若 $f(\frac{3}{2} - 2x), g(2 + x)$ 均为偶函数,则

- A. $g(-\frac{1}{2}) = 0$ B. $f(0) = 0$
 C. $f(-1) = f(4)$ D. $g(-1) = g(2)$

12. 已知函数 $f(x) = \ln(x - \frac{\pi}{4}) + \sin x + \cos x$,下列说法正确的有

- A. 函数 $f(x)$ 是周期函数 B. 函数 $f(x)$ 有唯一零点
 C. 函数 $f(x)$ 有无数个极值点 D. 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 上不是单调函数

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 已知函数 $f(x) = ax - a - \ln x$,且 $f(x)$ 的最小值为0,则 a 的值为_____.

14. 已知抛物线 $x^2 = 2y$ 的焦点为 F , 点 $M(3, 6)$, 点 Q 在抛物线上, 则 $|MQ| + |QF|$ 的最小值为 _____.

15. 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\ln x$ 在 $(t, t+1)$ 上不单调, 则实数 t 的取值范围为 _____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, \frac{n}{2}a_{n+2}$ 是 $(n+2)a_n, \lambda(n^2 + 2n)$ 的等差中项, 若 $a_{2n+1} > a_{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则实数 λ 的取值范围为 _____.

四、解答题 (本题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

求满足下列条件的直线 l 的一般式方程:

(1) 经过直线 $l_1: 2x - y + 9 = 0, l_2: 3x + 2y + 3 = 0$ 的交点 P , 且经过点 $(2, 4)$;

(2) 与直线 $l_3: 3x - y = 0$ 垂直, 且点 $Q(2, -5)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{10}$.

18. (本小题满分 12 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} + 2a_n a_{n+1} - a_n = 0, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求证: $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(-\sqrt{3}, 0)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过椭圆 C 的左焦点, 倾斜角为 60° 的直线与椭圆交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle AOB$ 的面积.