



7. 函数  $f(x), g(x)$  满足: 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x^2 - 2x + 4) = g(x)$ , 若关于  $x$  的方程  $g(x) + \cos \pi x = 0$  只有 5 个根, 则这 5 个根之和
- A. 5                                  B. 6                                  C. 8                                  D. 9
8. 已知  $f(x)$  是定义在  $(0, +\infty)$  上的增函数, 且恒有  $f[f(x) - \ln x] = 1$ , 则“ $a > 1$ ”是“ $f(x) \leq ax - 1$  恒成立”的
- A. 充分不必要条件                                  B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件
9. 已知  $\triangle OAB$ ,  $OA = 1, OB = 2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$ , 过点  $O$  作  $OD$  垂直  $AB$  于点  $D$ , 点  $E$  满足  $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ , 则  $\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{EA}$  的值为
- A.  $-\frac{3}{28}$     B.  $-\frac{1}{21}$   
C.  $-\frac{2}{9}$     D.  $-\frac{2}{21}$
10. 函数  $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的图象在  $[0, 2]$  上恰有两个最大值点, 则  $\omega$  的取值范围为
- A.  $[\pi, 2\pi]$     B.  $\left[\pi, \frac{9\pi}{2}\right)$   
C.  $\left[\frac{13\pi}{12}, \frac{9\pi}{2}\right)$     D.  $\left[\frac{9\pi}{8}, \frac{17\pi}{8}\right)$
11. 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + a^2, & x < 3 \\ ax - \frac{11}{16}, & x \geq 3 \end{cases}$ , 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = f(n), n \in \mathbf{N}^*$ , 且为递增数列. 则实数  $a$  的取值范围是
- A.  $(0, 1)$     B.  $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$   
C.  $\left[\frac{3}{4}, 1\right)$     D.  $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$
12. 已知函数  $f(x) = e^{2x} + (a-2)e^x - x$  有两个零点, 则实数  $a$  取值范围是
- A.  $(0, 1)$     B.  $(1, +\infty)$   
C.  $(-\infty, 1)$     D.  $(-\infty, -1)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数  $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到  $y = g(x)$  的图象. 命题  $p_1: y = g(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称; 命题  $p_2: \left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$  是  $y = g(x)$  的一个对称中心. 则在命题  $q_1: p_1 \vee p_2, q_2: p_1 \wedge (\neg p_2), q_3: (\neg p_1) \wedge (\neg p_2), q_4: (\neg p_1) \vee p_2$  中, 是真命题的为 \_\_\_\_\_.
14. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(-x, -6)$ , 且  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ , 则  $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} =$  \_\_\_\_\_.
15. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 2^{\frac{n^2+n}{2}} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = a_n \cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)$ , 则  $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2020} =$  \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|1-x|, & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}f(x-2), & 2 < x \leq 6 \end{cases}$ , 则函数  $g(x) = xf(x) - 1$  的零点个数是 \_\_\_\_\_.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知函数  $f(x) = \log_2(4^x + 1) + kx (k \in \mathbf{R})$  为偶函数。

(1) 求  $k$  的值;

(2) 已知函数  $g(x) = 2^{f(x)+x} + m \cdot 2^x, x \in [0, 1]$ , 若  $g(x)$  的最小值为 1, 求实数  $m$  的值。

18. 在  $\triangle ABC$  中,  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 且满足条件  $a \cos B +$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} b \sin A = c.$$

(1) 求  $\angle A$  的大小;

(2) 若  $a = 2$ , 求  $\triangle ABC$  周长的取值范围。

19. 已知  $f(x) = x^2 - 3x$ , 数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = f(n)$ 。

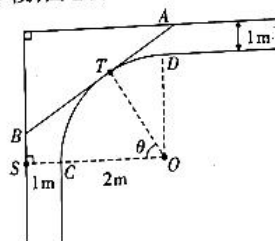
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n$ ;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \frac{a_n}{4 \times 3^n}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 且对于任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 总存在  $x \in [4, 6]$ , 使得

$T_n > mf(x)$  成立, 求实数  $m$  的取值范围。

20. 一根长为  $L$  的铁棒  $AB$  欲水平通过如图所示的走廊(假定通过时贴着内侧的圆弧墙壁,如图),该走廊由宽度为  $1\text{ m}$  的平行部分和一个半径为  $2\text{ m}$  的四分之一圆弧转角部分(弧  $CD$  段,圆心为  $O$ )组成.

- (1) 设  $\angle TOS = \theta$ , 试将  $L$  表示为  $\theta$  的函数;  
(2) 求  $L$  的最小值, 并说明此最小值的实际意义.



21. 函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + ax (a \in \mathbf{R})$ ,  $g(x) = e^x + \frac{3}{2}x^2$

- (1) 讨论  $f(x)$  在区间  $(0, 2)$  上极值点个数;  
(2) 若对于  $\forall x > 0$ , 总有  $f(x) \leq g(x)$ , 求实数  $a$  的取值范围.

22. 若不等式  $\ln x \geq \frac{k(x-1)}{x+1}$  对于  $\forall x \in [1, +\infty)$  恒成立;

- (1) 求实数  $k$  的取值范围;

- (2) 已知  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 若  $f(x) = m$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ .

求证:  $x_1 + x_2 > \frac{3}{m} - e$  (其中  $e$  为自然对数的底数)

## 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线