

海淀区高三年级第一学期期末练习参考答案

数 学 (文科)

2019.01

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A 2. C 3. D 4. B 5. A 6. C 7. C 8. B

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $x = -1$ 10. 8 11. $\frac{4}{3}$
12. $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}$ 13. 0 14. $e, t < -1$

说明：第 11, 14 题第一空 3 分，第二空 2 分

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15. 解：(I) 因为 $a_1 = 2$, $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1} (n \geq 2)$

所以 $a_2 = a_1 + 2 = 4$, $a_3 = a_2 + 4 = 8$, $a_4 = a_3 + 8 = 16$

因为 $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1} (n \geq 2)$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = 2^{n-2}$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = 2^{n-3}$$

.....

$$a_3 - a_2 = 2^2$$

$$a_2 - a_1 = 2^1$$

把上面 $n-1$ 个等式叠加，得到

$$a_n - a_1 = 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 2$$

所以 $a_n = 2^n (n \geq 2)$

又 $n=1$ 时, $a_1 = 2$ 符合上式，所以 $a_n = 2^n$

(II) 因为 $b_n = 2 \log_2 a_n - 1 = 2 \log_2 2^n - 1 = 2n - 1$

所以 $b_n - b_{n-1} = (2n-1) - (2n-3) = 2$

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 $b_1 = 1$ ，公差为 2 的等差数列

$$\text{所以 } S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = n^2$$

16. 解：（I）因为 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = a + 1$

$$\text{所以 } f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{6}) = (a+1) - (\frac{a}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{a}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\text{当 } a = -3 \text{ 时, } f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{6})$$

$$\text{当 } a > -3 \text{ 时, } f(\frac{\pi}{2}) > f(\frac{\pi}{6})$$

$$\text{当 } a < -3 \text{ 时, } f(\frac{\pi}{2}) < f(\frac{\pi}{6})$$

（II）当 $a = -6$ 时，

$$\begin{aligned} f(x) &= -6\sin x - \cos 2x \\ &= -6\sin x - (1 - 2\sin^2 x) \\ &= 2\sin^2 x - 6\sin x - 1 \\ &= 2(\sin x - \frac{3}{2})^2 - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

设 $t = \sin x$, 所以 $t \in [-1, 1]$

$$\text{所以 } y = 2(t - \frac{3}{2})^2 - \frac{11}{2}, \text{ 其对称轴为 } t = \frac{3}{2}$$

$$\text{因为 } t = \frac{3}{2} > 1,$$

所以当 $t = 1$ 时，函数取得最小值 -5.

17. 解：（I）设这名学生考核优秀为事件 A

由茎叶图中的数据可以知道，30 名同学中，有 7 名同学考核优秀

$$\text{所以所求概率 } P(A) \text{ 约为 } \frac{7}{30}$$

（II）设从图中考核成绩满足 $X \in [80, 89]$ 的学生中任取 2 人，至少有一人考核成绩优秀为

事件 B

因为表中成绩在 $[80, 89]$ 的 6 人中有 2 个人考核为优

所以基本事件空间 Ω 包含 15 个基本事件，事件 B 包含 9 个基本事件

$$\text{所以 } P(B) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

(III) 根据表格中的数据，满足 $\left| \frac{X-85}{10} \right| \leq 1$ 的成绩有 16 个，

$$\text{所以 } P\left(\left| \frac{X-85}{10} \right| \leq 1\right) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} > 0.5$$

所以可以认为此次冰雪培训活动有效

18. 证明：

(I) 因为 $AB \parallel CD$

$CD \subset \text{平面 } PCD$

$AB \not\subset \text{平面 } PCD$

所以 $AB \parallel \text{平面 } PCD$

(II) 法一：

因为平面 $ABCD \perp \text{平面 } PCD$

平面 $ABCD \cap \text{平面 } PCD = CD$

$AD \perp CD$, $AD \subset \text{平面 } ABCD$

所以 $AD \perp \text{平面 } PCD$

法二：

在平面 PCD 中过点 D 作 $DH \perp CD$ ，交 PC 于 H

因为平面 $ABCD \perp \text{平面 } PCD$

平面 $ABCD \cap \text{平面 } PCD = CD$

$DH \subset \text{平面 } PCD$

所以 $DH \perp \text{平面 } ABCD$

因为 $AD \subset \text{平面 } ABCD$

所以 $DH \perp AD$

又 $AD \perp PC$, $PC \cap DH = H$

所以 $AD \perp \text{平面 } PCD$

(III) 法一:

假设存在棱 BC 上点 F , 使得 $MF \parallel PC$

连接 AC , 取其中点 N

在 $\triangle PAC$ 中, 因为 M, N 分别为 PA, CA 的中点, 所以 $MN \parallel PC$

因为过直线外一点只有一条直线和已知直线平行, 所以 MF 与 MN 重合

所以点 F 在线段 AC 上, 所以 F 是 AC, BC 的交点 C

即 MF 就是 MC

而 MC 与 PC 相交, 矛盾, 所以假设错误, 问题得证

法二:

假设存在棱 BC 上点 F , 使得 $MF \parallel PC$, 显然 F 与点 C 不同

所以 P, M, F, C 四点在同一个平面 α 中

所以 $FC \subset \alpha, PM \subset \alpha$

所以 $B \in FC \subset \alpha, A \in PM \subset \alpha$

所以 α 就是点 A, B, C 确定的平面 $ABCD$, 且 $P \in \alpha$

这与 $P-ABCD$ 为四棱锥矛盾, 所以假设错误, 问题得证

19. 解: (I)

因为 $a^2 = 4, b^2 = 2$, 所以 $a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}$

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(II) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

若 $k = \frac{1}{2}$, 则直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}, \text{ 得 } 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

解得 $x_1 = -2, x_2 = \frac{2}{3}$

设 $A(0, 1)$, 则 $S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2} |AB| (|x_1| + |x_2|) = \frac{1}{2} \times 3 \times (\frac{2}{3} + 2) = 4$

(III) 法一:

设点 $C(x_3, y_3)$,

因为 $P(x_1, y_1)$, $B(0, -2)$, 所以
$$\begin{cases} x_3 = \frac{x_1}{2} \\ y_3 = \frac{-2 + y_1}{2} \end{cases}$$

又点 $P(x_1, y_1)$, $C(x_3, y_3)$ 都在椭圆上,

所以
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \\ \frac{(\frac{x_1}{2})^2}{4} + \frac{(\frac{-2 + y_1}{2})^2}{2} = 1 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{14}}{2} \\ y_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{14}}{2} \\ y_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

所以 $k = -\frac{3\sqrt{14}}{14}$ 或 $k = \frac{3\sqrt{14}}{14}$

法二:

设 $C(x_3, y_3)$

显然直线 PB 有斜率, 设直线 PB 的方程为 $y = k_1x - 2$

由
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k_1x - 2 \end{cases}, \text{ 得 } (2k_1^2 + 1)x^2 - 8k_1x + 4 = 0$$

所以
$$\begin{cases} \Delta = 16(2k_1^2 - 1) > 0 \\ x_1 + x_3 = \frac{8k_1}{2k_1^2 + 1} \\ x_1x_3 = \frac{4}{2k_1^2 + 1} \end{cases}$$

又 $x_3 = \frac{1}{2}x_1$

解得
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{14}}{2} \\ k_1 = -\frac{3\sqrt{14}}{14} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{14}}{2} \\ k_1 = \frac{3\sqrt{14}}{14} \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{14}}{2} \\ y_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{14}}{2} \\ y_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{所以 } k = \frac{3\sqrt{14}}{14} \text{ 或 } k = -\frac{3\sqrt{14}}{14}$$

20. 解: (I) 因为 $f(x) = \frac{a-x^2}{e^x}$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - a}{e^x}$$

$$\text{当 } a=3 \text{ 时, } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{e^x}$$

$$\text{所以 } f'(-1) = 0, \text{ 而 } f(-1) = 2e$$

曲线 $y = f(x)$ 在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $y = 2e$

(II) 法一:

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - a}{e^x}, \text{ 令 } f'(x) = 0$$

$$\text{得 } x_1 = 1 - \sqrt{1+a}, x_2 = 1 + \sqrt{1+a}$$

显然当 $a > 0$ 时, $x_1 < 0, x_2 > 2$

所以 $x, f'(x), f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的变化情况如下表:

x	$(0, x_2)$	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	]	极小值	Z

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, x_2)$ 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(x_2)$, 所以只需证明 $f(x_2) > -\frac{2}{e}$

$$\text{因为 } x_2^2 - 2x_2 - a = 0, \text{ 所以 } f(x_2) = \frac{a - x_2^2}{e^{x_2}} = \frac{-2x_2}{e^{x_2}}$$

设 $F(x) = \frac{-2x}{e^x}$, 其中 $x > 2$

所以 $F'(x) = \frac{-2(1-x)}{e^x} = \frac{2(x-1)}{e^x}$

当 $x > 2$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 单调递增,

因为 $x_2 > 2$, 所以 $f(x_2) = F(x_2) > F(1) = -\frac{2}{e}$, 问题得证

法二:

因为 $a > 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{a-x^2}{e^x} > \frac{-x^2}{e^x}$

设 $F(x) = \frac{-x^2}{e^x}$, 其中 $x > 0$

所以 $F'(x) = \frac{x^2-2x}{e^x} = \frac{x(x-2)}{e^x}$

所以 x , $F'(x)$, $F(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

所以 $F(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $F(x)$ 在 $x=2$ 时取得最小值 $F(2) = -\frac{4}{e^2}$, 而 $-\frac{4}{e^2} - (-\frac{2}{e}) = \frac{2e-4}{e^2} > 0$

所以 $x > 0$ 时 $F(x) > -\frac{2}{e}$

所以 $f(x) > F(x) > -\frac{2}{e}$, 问题得证

法三:

因为“对任意的 $x > 0$, $\frac{a-x^2}{e^x} > -\frac{2}{e}$ ”等价于“对任意的 $x > 0$, $\frac{a-x^2}{e^x} + \frac{2}{e} > 0$ ”

即“ $x > 0$, $\frac{2e^x + e(a-x^2)}{e^{x+1}} > 0$ ”, 故只需证“ $x > 0$ 时, $2e^x + e(a-x^2) > 0$ ”

设 $g(x) = 2e^x + e(a-x^2)$, 其中 $x \geq 0$

所以 $g'(x) = 2e^x - 2ex$

设 $h(x) = g'(x)$, $h'(x) = 2e^x - 2e$,

令 $h'(x)=0$ ，得 $x=1$

所以 x ， $h'(x)$ ， $h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，而 $h(1)=2e-2e=0$

所以 $h(x)\geq 0$

所以 $x>0$ 时， $g'(x)\geq 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，得 $g(x)>g(0)$

而 $g(0)=2>0$ ，所以 $g(x)>0$ 问题得证

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注