

2022—2023 学年度高中一年级教学质量测试
答案及评分标准(参考) 数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	D	B	C	A	D	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
AB	AD	BD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{1}{2}$

14. 1

15. 24

16. $\frac{21+12\sqrt{7}}{8}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) $\because O(0, 0), A(1, 1), B(-1, 0)$,
 $\therefore \vec{OA} = (1, 1), \vec{OB} = (-1, 0), \vec{AB} = (-2, -1)$, 故 $\vec{OC} = (1-\lambda, 1)$. ----- 2分
 $\because \vec{OC} \perp \vec{AB}$,
 $\therefore \vec{OC} \cdot \vec{AB} = -2(1-\lambda) + (-1) \times 1 = 0$, ----- 4分
解得 $\lambda = \frac{3}{2}$. ----- 5分
(2) $\because \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 = -1, |\vec{OA}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |\vec{OB}| = 1$,
 $\therefore \cos \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ----- 8分
故 $\vec{OA}$ 与 $\vec{OB}$ 的夹角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ----- 10分

18. 解：(1) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sqrt{3} \sin x \cos x$
 $= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为 π . $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2) 由 $0 < A < \pi$, 即 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$, $f\left(\frac{A}{2}\right) = 1$,

得 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$, $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

$$\therefore \sin B + \sin C = \sin B + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \sqrt{3} \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right). \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\because 0 < B < \frac{2\pi}{3}, \therefore \frac{\pi}{6} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$\therefore$ 当 $B + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $B = \frac{\pi}{3}$ 时, $\sin B + \sin C$ 取得最大值 $\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

19. 证明: (1) 如图, 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 FO .

$\because F$ 为 CC_1 的中点, O 为 AC 的中点,

$\therefore FO$ 为 $\triangle ACC_1$ 的中位线, $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

$\therefore FO \parallel AC_1$.

又 $\because FO \subset \text{平面 } BDF$, $AC_1 \not\subset \text{平面 } BDF$,

$\therefore AC_1 \parallel \text{平面 } BDF$. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 连接 ED_1 , EB_1 , 连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O_1 , 连接 EO_1 , 如图.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BD \parallel B_1D_1$, $\because B_1D_1 \not\subset \text{平面 } BDF$, $BD \subset \text{平面 } BDF$,

$\therefore B_1D_1 \parallel \text{平面 } BDF$. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

又 $\because EO_1$ 为 $\triangle AA_1C_1$ 的中位线,

$\therefore EO_1 \parallel AC_1$.

$\because AC_1 \parallel \text{平面 } BDF$, $EO_1 \not\subset \text{平面 } BDF$,

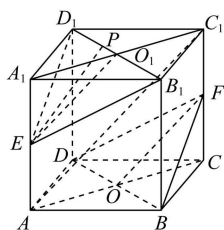
$\therefore EO_1 \parallel \text{平面 } BDF$. $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

又 $\because EO_1 \subset \text{平面 } B_1D_1E$, $B_1D_1 \subset \text{平面 } B_1D_1E$, $EO_1 \cap B_1D_1 = O_1$,

$\therefore \text{平面 } B_1D_1E \parallel \text{平面 } BDF$. $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

$\because PE \subset \text{平面 } B_1D_1E$,

$\therefore PE \parallel \text{平面 } BDF$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$



20. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 及 $a \sin B - \sqrt{3} b \cos A = 0$,

得 $\sin A \sin B - \sqrt{3} \sin B \cos A = 0$. -----2分

又在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B \neq 0$, $\therefore \sin A = \sqrt{3} \cos A$,

$\therefore \tan A = \sqrt{3}$. -----4分

$\because 0 < A < \pi$,

$\therefore A = \frac{\pi}{3}$. -----6分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可知 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

又 $\because A = \frac{\pi}{3}$, $\therefore c^2 - 2c - 3 = 0$. -----8分

又 $c > 0$, 解得 $c = 3$, -----10分

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. -----12分

21. 证明: (1) $\because PA = AB$, 且 E 为 PB 的中点,

$\therefore AE \perp PB$.

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp BC$. -----2分

$\because$ 在正方形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$,

又 $\because AB, PA \subset$ 平面 PAB , $PA \cap AB = A$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAB .

又 $\because AE \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore BC \perp AE$. -----4分

$\because BC, PB \subset$ 平面 PBC , $PB \cap BC = B$,

$\therefore AE \perp$ 平面 PBC . -----6分

(2) 设 PD 的中点为 Q , 连接 AQ , 如图.

$\because PA = AD$, $\therefore AQ \perp PD$.

又 $\because PA \perp CD$, $AD \perp CD$, $PA, AD \subset$ 平面 PAD , $PA \cap AD = A$,

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD . -----8分

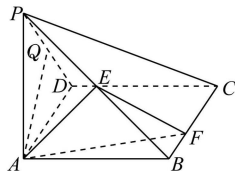
$\because AQ \subset \text{平面 } PAD, \therefore CD \perp AQ.$

又 $\because CD, PD \subset \text{平面 } PCD, CD \cap PD = D,$

$\therefore AQ \perp \text{平面 } PCD.$ ----- 10分

$\because AQ \subset \text{平面 } PAD,$

$\therefore \text{平面 } PAD \perp \text{平面 } PCD.$ ----- 12分



22. 解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\sin \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{AB}$, 则 $AB = \frac{2}{\sin \alpha};$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $\angle EAC = \alpha, \cos \alpha = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{AC}$, 则 $AC = \frac{1}{\cos \alpha},$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S(\alpha) = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$
----- 3分

$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \therefore 0 < 2\alpha < \pi,$

故当 $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin 2\alpha$ 取得最大值 1, 此时 $S(\alpha)$ 取得最小值 2.
----- 5分

(2) 由(1)知 $AB = \frac{2}{\sin \alpha}, AC = \frac{1}{\cos \alpha},$

$\therefore f(\alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha.$

不等式 $mf(\alpha) + b \leq \frac{m}{S(\alpha)} + m$ 对任意的 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立,

等价于 $b \leq -m(\sin \alpha + \cos \alpha) + m \sin \alpha \cos \alpha + m$ 对任意的 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立.
----- 6分

令 $t = \sin \alpha + \cos \alpha, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$

则 $t \in (1, \sqrt{2}], \sin \alpha \cos \alpha = \frac{t^2 - 1}{2},$

$\therefore b \leq -mt + \frac{m}{2}(t^2 - 1) + m = \frac{m}{2}(t^2 - 2t + 1) = \frac{m}{2}(t - 1)^2.$
----- 8分

令 $h(t) = \frac{m}{2}(t - 1)^2$, 其中 $1 < t \leq \sqrt{2},$

$\therefore b \leq h(t), t \in (1, \sqrt{2}].$

① 当 $m = 0$ 时, $h(t) = 0$, 即 $b \leq 0;$ ----- 9分

②当 $m > 0$ 时, 函数 $h(t)$ 在 $(1, \sqrt{2}]$ 上单调递增, $\therefore h(t) > h(1) = 0$, 即 $b \leq 0$;

③当 $m < 0$ 时, 函数 $h(t)$ 在 $(1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, $\therefore h(t) \geq h(\sqrt{2}) = \frac{3}{2}m - \sqrt{2}m$, 即

$b \leq \frac{3}{2}m - \sqrt{2}m$.

综上, 当 $m \geq 0$ 时, 实数 b 的取值范围是 $(-\infty, 0]$; 当 $m < 0$ 时, 实数 b 的取值范围

是 $(-\infty, \frac{3}{2}m - \sqrt{2}m]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线