

2023 届六校第三次联考

数学答案及评分标准

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | C | B | A | A | D | B | D | C |

8. C 【解析】在同一坐标系作出 $y = a^x (a > 1)$ 和 $y = x^2$ 的简图. 可知 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$,

$a^x = x^2 \Leftrightarrow \ln a = \frac{2 \ln x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个根. 令 $g(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$, 在 $(0, e)$ 上,

$g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增; 在 $(e, +\infty)$ 上, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减. $x \rightarrow 0, g(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow 0$, 且

$g(x) > 0$. 所以 $0 < \ln a < \frac{2}{e}$, $1 < a < e^{\frac{2}{e}}$; 若 $2x_2 = x_1 + x_3$, 由 $\begin{cases} a^{x_1} = x_1^2 \\ a^{x_2} = x_2^2 \\ a^{x_3} = x_3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \log_a(-x_1) \\ x_2 = 2 \log_a x_2 \\ x_3 = 2 \log_a x_3 \end{cases}$, 所以

$4 \log_a x_2 = 2 \log_a(-x_1) + 2 \log_a x_3$, $x_2^2 = -x_1 x_3$, 即 $x_3^2 - 2x_2 x_3 - x_2^2 = 0$.

又由 $0 < x_2 < x_3$, 可解得 $\frac{x_3}{x_2} = \sqrt{2} + 1$, 所以 $2 \ln a < \frac{4}{e} < 2 < \sqrt{2} + 1 = \frac{x_3}{x_2}$.

二、多选择题（每小题 5 分，共 20 分）

| | | | | |
|----|-----|-----|----|-----|
| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 答案 | ABC | ABD | BC | ACD |

12. ACD 【详解】对于 A, $f(x) = \ln x + a(x^2 - 2x + 1) = \ln x + a(x-1)^2$

$f(1) = \ln 1 + a(1-1)^2 = 0$, $\therefore x=1$ 是 $f(x)$ 的一个零点, 故 A 正确

对于 B, $f'(x) = \frac{1}{x} + a(2x-2) = \frac{2ax^2 - 2ax + 1}{x}$ $\therefore f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

$\therefore 2ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 即 $f'(x)$ 有两个变号零点 $x_1 > 0, x_2 > 0$

$\therefore \Delta > 0$, 即 $(-2a)^2 - 4 \times 2a \times 1 = 4a^2 - 8a = 4a(a-2) > 0$, $\therefore a > 2$ 或 $a < 0$

又 $x_1 > 0, x_2 > 0$, $\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2a} > 0 \end{cases}$, 解得 $a > 0$, 综上, $a > 2$, 故 B 错误

对于C, 由B选项可得, $x_1+x_2=1$, $\therefore x_2=1-x_1$, $\therefore 1-x_1 > x_1$, $\therefore 0 < x_1 < \frac{1}{2}$, 故C正确

对于D, $f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1+a(x_1^2-2x_1+1)+\ln x_2+a(x_2^2-2x_2+1)=\ln x_1x_2+a[x_1^2+x_2^2-2(x_1+x_2)+2]$

将 $x_1+x_2=1, x_1x_2=\frac{1}{2a}$ 代入上式 $f(x_1)+f(x_2)=\ln \frac{1}{2a}+a(1^2-2\times\frac{1}{2a}-2\times 1+2)=-\ln 2a+a(1-\frac{1}{a})$
 $=-\ln 2-\ln a+a-1=a-\ln a-\ln 2-1$

令 $h(a)=a-\ln a-\ln 2-1(a>2)$, $h'(a)=1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}>0$ 有 $h(a)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(a)>h(2)=2-\ln 2-\ln 2-1=1-2\ln 2$, 故D正确, 故选: ACD

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. ± 2 14. $\frac{8\pi}{3}$ 15. $-2\sqrt{3}$ 16. (1) 1 (2分); (2) 88 (3分).

16题【解析】(1) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{10^2}>1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=1\frac{9}{22}$.

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{10^2}<1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=1\frac{9}{10}$, $\therefore \left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{10^2}\right]=1$.

(2) 由题意可得, $S_n>0$, 当 $n\geq 2$ 时, $S_n=\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}})$, 化简得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$,

又当 $n=1$ 时, $S_1^2=a_1^2=1$, \therefore 数列 $\{S_n^2\}$ 是首项、公差均为1的等差数列,

$\therefore S_n^2=1+(n-1)\times 1=n$, 即 $S_n=\sqrt{n}$, 当 $n\geq 2$ 时,

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2S_n}=\frac{1}{S_n}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ ①.

设 $S=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\dots+\frac{1}{S_{2023}}$, 由①可得, $S>1+2\times[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\dots+(\sqrt{2024}-\sqrt{2023})]$

$=1+2\times(\sqrt{2024}-\sqrt{2})$, $(\sqrt{2024}-\sqrt{2})^2=2026-4\sqrt{1012}>2026-4\sqrt{1024}=2026-4\times 32=1898$

$43.5^2=1892.25$, $\therefore (\sqrt{2024}-\sqrt{2})^2>1898>1892.25=43.5^2$, $\therefore \sqrt{2024}-\sqrt{2}>43.5$.

$\therefore 1+2\times(\sqrt{2024}-\sqrt{2})>1+2\times 43.5=88$ 且 $S<1+2\times[(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\dots+(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})]$

$=1+2\times(\sqrt{2023}-1)=2\sqrt{2023}-1$, $\because 45^2=2025$, $\therefore 2\sqrt{2023}-1<2\sqrt{2025}-1=2\times 45-1=89$.

$\therefore \left[\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\dots+\frac{1}{S_{2023}}\right]=88$.

四、17. 【解析】(1) 由题可知 ζ 的可能取值为 0, 1, 2,1分

则 $P(\xi = 0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$,2分

$P(\xi = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$,3分

$P(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$,4分

所以 ξ 的分布列为:

| | | | |
|-------|-----|-----|-----|
| ξ | 0 | 1 | 2 |
| P | 0.1 | 0.6 | 0.3 |

即 $E(\xi) = 1.2$;5分

(2) 由已知得 $\bar{x} = \frac{18+19+20+21+22}{5} = 20$,6分

$\bar{y} = \frac{0.62+0.69+0.71+0.72+0.76}{5} = 0.7$,7分

所以 $\hat{b} = \frac{(-2) \times (-0.08) + (-1) \times (-0.01) + 0 \times 0.01 + 1 \times 0.02 + 2 \times 0.06}{4+1+0+1+4} = 0.031$,

$\hat{a} = 0.7 - 0.031 \times 20 = 0.08$, 即 $\hat{y} = 0.08 + 0.031x$,9分

当第6次实验, 即 $x = 21$ 时, $\hat{y} = 0.08 + 0.031 \times 21 = 0.731$,

所以根据回归方程估计这次实验中该种子的发芽率为 73.1%.10分

18. 【解析】: (1) $AB = 3, BC = 9$, 在 $\triangle BOC$ 中, $\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin \angle BOC}$;1分

在 $\triangle BOA$ 中, $\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \angle BOA}$2分

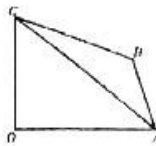
又 $\angle BOC + \angle BOA = \frac{\pi}{2}$, 从而 $OB^2 = OB^2 (\sin \angle BOC)^2 + OB^2 (\sin \angle BOA)^2$

$= 81 \sin^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha = 90 \sin^2 \alpha$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$, 故 $OB = \frac{3\sqrt{30}}{2}$ (米).5分

(2) 由题意, $AB = BC = 6$, $\angle ACB = \angle CAB$, $\angle ABC = 2\pi - 2\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - 2\alpha$ 6分

所以 $\angle OAC = \angle OCA = \frac{\pi}{4}$ 7分



在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 72 - 72 \cos \left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha \right) = 72 + 72 \sin 2\alpha$$

.....8分

$$\text{所以 } S_{\triangle AOC} = \frac{1}{4} AC^2 = 18 + 18 \sin 2\alpha, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha \right) = -18 \cos 2\alpha$$

.....9分

$$\text{于是 } S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AOC} = -18 \cos 2\alpha + 18 + 18 \sin 2\alpha = 18\sqrt{2} \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + 18, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

.....11分

当 $2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ 时, S 取到最大值, 最大值为 $18\sqrt{2} + 18$.

因此, 当 $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ 时, 绿地 $OABC$ 最大的面积为 $18\sqrt{2} + 18$ 平方米.

.....12分

19. 【解析】: (1) $a_1 = S_1 = 1$,1分

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n + 2 - (n-1)^2 + 2(n-1) - 2 = 2n - 3.$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n-3 & (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*) \end{cases} \text{2分}$$

$$n=1 \text{ 时, } b_1 = T_1 = 1 - b_1, \quad b_1 = \frac{1}{2},$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } b_n = T_n - T_{n-1} = b_{n-1} - b_n, \quad b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}, \text{4分}$$

$\therefore \{b_n\}$ 为等比数列, 公比是 $\frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \text{6分}$$

$$(2) n=1 \text{ 时, } R_n = a_1 b_1 = \frac{1}{2} \text{7分}$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } R_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots + (2n-3) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\frac{1}{2}R_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + (2n-3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{-----8分}$$

两式相减, 得: $\frac{1}{2}R_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - (2n-3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 1 - (2n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{-----10分}$$

$$R_n = 2 - (2n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由于 $a_n, b_n > 0$ 故 $\{R_n\}$ 递增, 且 $(2n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, 综上, 故 $\frac{1}{2} \leq R_n < 2$. -----12分

20. 【解析】(1) 因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $BC \subset$ 面 $ABCD$, 则 $PD \perp BC$, -----1分
由 $\angle BAD = 90^\circ$, $AD = AB = 1$, 则 $BD = \sqrt{2}$, 又 $\angle CDA = 90^\circ$, 则 $AB \parallel DC$, -----2分

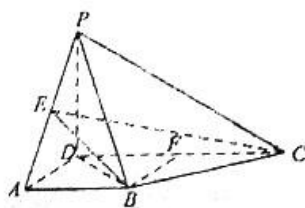
设 F 为 CD 中点, 连接 BF , 易知: $ABFD$ 为正方形, 则 $BF = 1$, 又 $CD = 2$, 即 $FC = 1$, 所以 $BC = \sqrt{2}$.

综上, $BC^2 + BD^2 = CD^2$, 即 $BD \perp BC$.

-----3分 又 $BD \cap PD = D$, 则 $BC \perp$ 面 PBD .

又 $BC \subset$ 面 BCE .

所以平面 $PBD \perp$ 平面 BCE . -----4分



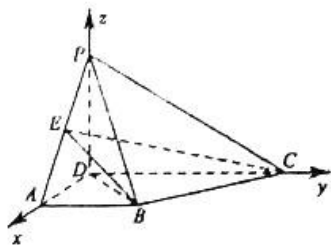
(2) 以 DA, DC, DP 为 x, y, z 轴建立坐标系如图, 设 $PD = m$,

则 $D(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,2,0)$, $E\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{m}{2}\right)$, $P(0,0,m)$. -----5分

所以 $\overline{PB} = (1,1,-m)$, $\overline{EB} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{m}{2}\right)$, $\overline{BC} = (-1,1,0)$.

若 $\vec{\alpha} = (x, y, z)$ 为面 PBC 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \overline{BC} = -x + y = 0 \\ \vec{\alpha} \cdot \overline{PB} = x + y - zm = 0 \end{cases}$ 令

$x=1$, 则 $\vec{\alpha} = \left(1, 1, \frac{2}{m}\right)$. -----7分



若 $\vec{\beta} = (a, b, c)$ 为面 EBC 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \vec{\beta} \cdot \overline{BC} = -a + b = 0 \\ \vec{\beta} \cdot \overline{EB} = \frac{a}{2} + b - \frac{cm}{2} = 0 \end{cases}$

令 $a=1$, 则 $\beta=(1,1,\frac{1}{m})$, 所以 $|\cos\langle\alpha,\beta\rangle|=\frac{|\alpha\cdot\beta|}{|\alpha||\beta|}=\frac{2+\frac{6}{m}}{\sqrt{2+\frac{4}{m^2}}\sqrt{2+\frac{9}{m^2}}}=2\sqrt{6}$, 整理得 $\frac{9}{m^2}-\frac{6}{m^2}+1=0$,

所以 $m=\sqrt{3}$, 即 $PD=\sqrt{3}$. -----4分

易得: $PA=2, PC=\sqrt{7}$, 在直角 $\triangle PDB$ 中, $PB=\sqrt{5}$, 所以 $S_{\triangle PDB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. -----5分

由上知: $\vec{EB}=(\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 且面 PBC 的一个法向量 $\vec{\alpha}=(1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}})$.

故 E 到面 PBC 的距离 $d=\frac{|\vec{EB}\cdot\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{10}{3}}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$, -----11分

所以 $V_{P-BCE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PBC}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{30}}{20}=\frac{\sqrt{3}}{12}$. -----12分

21. 【解析】: (1) 由题意可知, $c=1$. -----1分

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$, 将点 $(1, \frac{3}{2})$ 代入椭圆方程,

得 $(a^2-4)(4a^2-1)=0$. -----2分

解得 $a^2=\frac{1}{4}$ (舍), $a^2=4$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. -----3分

(2) 【解法一】若直线 $MQ\perp x$ 轴, 联立 $\begin{cases} x=1 \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$, $y=\pm\frac{3}{2}$

得 $\overline{MT}=5\overline{MQ}$, 不符合题意. -----4分

设 $M(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $N(x_3, y_3)$, $P(x_4, y_4)$, $l_{MQ}: y-1=k(x-1)$

由 $\begin{cases} y=kx+1-k \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2+(8k-8k^2)x+(4k^2-8k-8)=0$

$x_1+x_2=\frac{8k^2-8k}{3+4k^2}$ ①, $x_1x_2=\frac{4k^2-8k-8}{3+4k^2}$ ②. -----6分

由 $\overline{MT}=3\overline{TQ}$, 得 $1-x_1=3(x_2-1)$, $x_1+3x_2=4$ ③

由①③得 $x_2=\frac{4k^2+4k+6}{3+4k^2}$, $x_1=\frac{4k^2-12k-6}{3+4k^2}$, 代入② -----8分

得: $(4k^2-12k-6)(4k^2+4k+6)=(4k^2-8k-8)(3+4k^2)$, 即 $7k^2+18k+3=0$

$$k_1 + k_2 = -\frac{18}{7}, k_1 k_2 = \frac{3}{7} \quad \text{-----10分}$$

$$k_{MN} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{(k_2 x_3 + 1 - k_2) - (k_1 x_1 + 1 - k_1)}{x_3 - x_1} = \frac{k_2 \cdot \frac{-12k_2 - 9}{3 + 4k_2^2} - k_1 \cdot \frac{-12k_1 - 9}{3 + 4k_1^2}}{\frac{4k_2^2 - 12k_2 - 6}{3 + 4k_2^2} - \frac{4k_1^2 - 12k_1 - 6}{3 + 4k_1^2}}$$

$$= \frac{(4k_2^2 + 3k_2)(3 + 4k_1^2) - (4k_1^2 + 3k_1)(3 + 4k_2^2)}{(4k_2^2 + 3)(3 + 4k_1^2) - (4k_1^2 + 3)(3 + 4k_2^2)} = \frac{12(k_1 + k_2) + 9 - 12k_1 k_2}{12 - 16k_1 k_2 - 12(k_1 + k_2)} = \frac{3}{4} \quad \text{-----12分}$$

(解法二) 设 $M(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $N(x_3, y_3)$, $P(x_4, y_4)$, $T(1, 1)$.

因为 $\overline{MT} = 3\overline{TQ}$, 所以 $\begin{cases} 1 - x_1 = 3(x_2 - 1) \\ 1 - y_1 = 3(y_2 - 1) \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_2 = \frac{4 - x_1}{3} \\ y_2 = \frac{4 - y_1}{3} \end{cases}$ -----5分

又 $M(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 都在椭圆上,

$$\text{所以 } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \frac{1}{4}\left(\frac{4 - x_1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4 - y_1}{3}\right)^2 = 1, \quad \text{-----6分}$$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 & \text{-----①} \\ \frac{1}{4}(4 - x_1)^2 + \frac{1}{3}(4 - y_1)^2 = 9 & \text{-----②} \end{cases} \quad \text{-----7分}$$

$$\text{②-①得 } \frac{1}{4}(4 - 2x_1) \cdot 4 + \frac{1}{3}(4 - 2y_1) \cdot 4 = 8,$$

$$\text{即 } \frac{1}{4}(2 - x_1) + \frac{1}{3}(2 - y_1) = 1 \dots\dots \text{③}, \quad \text{-----8分}$$

$$\text{又 } \overline{NT} = 3\overline{TP}, \text{ 同理得 } \frac{1}{4}(2 - x_1) + \frac{1}{3}(2 - y_1) = 1 \dots\dots \text{④} \quad \text{-----10分}$$

$$\text{④-③得 } \frac{1}{4}(x_1 - x_1) + \frac{1}{3}(y_1 - y_1) = 0,$$

$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{4} \quad \text{-----12分}$$

22. 【解析】: (1) $f'(x) = e^x - a \cos x$, -----1分

①当 $0 < a \leq 1$ 时, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $a \cos x < 1$, $1 < e^x < e^\pi$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增, 没有极值点, 不合题意, 舍去; -----2分

②当 $a > 1$ 时, 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = e^x + a \sin x$, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上递

增, 又因为 $f'(0) = 1 - a < 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$. -----3分

所以 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一零点 x_1 . 且 $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $x \in (0, x_1)$, $f'(x) < 0$; $x \in \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x) > 0$. 所以

$f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一极值点, 符合题意. 综上, $a \in (1, +\infty)$. -----4分

(2) 由 (1) 知 $a > 1$, 所以 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f'(x) = e^x - a \cos x > 0$, 所以 $x \in (0, x_1)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$x \in (x_1, \pi)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. -----6分

所以 $x \in (0, x_1)$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 则 $f(x_1) < 0$. 又因为 $f(\pi) = e^\pi - 1 > 0$,

所以 $f(x)$ 在 (x_1, π) 上有唯一零点 x_2 . 即 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有唯一零点 x_2 . -----8分

因为 $f(2x_1) = e^{2x_1} - a \sin 2x_1 - 1 = e^{2x_1} - 2a \sin x_1 \cos x_1 - 1$, 由 (1) 知 $f'(x_1) = 0$, 所以 $e^{x_1} = a \cos x_1$,

则 $f(2x_1) = e^{2x_1} - 2e^{x_1} \sin x_1 - 1$. -----9分

构造 $p(t) = e^{2t} - 2e^t \sin t - 1, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 所以 $p'(t) = 2e^{2t} - 2e^t(\sin t + \cos t) = 2e^t(e^t - \sin t - \cos t)$,

记 $\varphi(t) = e^t - \sin t - \cos t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\varphi'(t) = e^t - \cos t + \sin t$. -----10分

显然 $\varphi'(t)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以 $\varphi'(t) > \varphi'(0) = 0$,

所以 $\varphi(t)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以 $\varphi(t) > \varphi(0) = 0$, 所以 $p'(t) > 0$, 所以 $p(t)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以

$p(t) > p(0) = 0$. -----11分

所以 $f(2x_1) > 0 = f(x_2)$. 由前面讨论可知: $x_1 < 2x_1 < \pi$, $x_1 < x_2 < \pi$. 且 $f(x)$ 在 (x_1, π) 上单调递增, 所以

$2x_1 > x_2$. -----12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

