深圳北理莫斯科大学

2018. 试题及解答.

【试题】

1. 求解方程
$$\left|2^x+1\right|-\left|2^x-1\right|=4^{-x}.$$

2. 比较如下常数与 7 的大小关系:
$$3\arccos\frac{2}{3}+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
并证明你的结论.

3. 解不等式
$$\frac{\sqrt{7x+1}-\sqrt{x+11}}{\sqrt{x-1}}\leqslant 1.$$

4. 解不等式组
$$\begin{cases}\log_{\sin x}(2\cos x-3\cos 2x-1)\leqslant 2+\log_{\sin x}2,\\ -\pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

5. 求满足如下等式的所有整数对 (m,n):
$$mn^3-2mn^2+n^2-2mn+4m=16.$$

6. 设有凸四边形 $ABCD$, 其边 AB, CD 的中点连线将 $ABCD$ 划分为面积相等的两部分. 若已知 $AB=3CD$, 试求边 AD 与 BC 的中点连线将四边形 $ABCD$ 划分所得两部分的面积之比.

7. 求出所有满足如下条件的 a 的取值: 其使得关于 x 的方程
$$a+\frac{1}{x}=b\left(|b-3|+1\right)$$
仅当 b 取值为某两个互异常数时无解.

8. 求 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 的一组整数取值, 使得 $a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2\neq 0$, 且 $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ 是如下方程的一个解
$$a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

【答案】

1. $x=-\dfrac{1}{3}$.

2. $3\arccos\dfrac{2}{3}+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>7$.

3. $(1,5]$.

4. $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. (m,n) 共有六种可能的取值: $(15,1)$, $(5,-1)$, $(4,0)$, $(1,3)$, $(0,-4)$, $(0,4)$.

6. $5:3$.

7. $a=3$, $a=4$.

8. $a_6=1$, $a_5=0$, $a_4=-9$, $a_3=-4$, $a_2=27$, $a_1=-36$, $a_0=-23$.

【解析】

1. 由指数函数的性质, 当 $x<0$ 时 $2^x-1<0$, 当 $x\geq 0$ 时 $2^x-1\geq 0$. 因而

$$2^x+1-\left|2^x-1\right|=2^{-2x}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ 2\cdot 2^x=2^{-2x}\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant 0\\ 2=2^{-2x}\end{cases}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x+1=-2x\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant 0\\ 1=-2x\end{cases}\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{1}{3}.$$

2. 因函数 arrcos 在其定义域 [-1, 1] 上严格单调递减, 而 $\dfrac{2}{3}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $\arccos\frac{2}{3}>\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$. 从而,

$$3\arccos\frac{2}{3}+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\arccos\frac{2}{3}+\frac{3\pi}{2}>\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}=\frac{9\pi}{4}>\frac{9\cdot 3.14}{4}=\frac{28.26}{4}>7.$$

3. **解**: 考虑左端表达式的定义域, 可得 $x\in(1,+\infty)$. 不等式两端同乘以 $\sqrt{x-1}$ 并移项, 得

$$\sqrt{7x+1}\leqslant\sqrt{x-1}+\sqrt{x+11}\ \Leftrightarrow\ 7x+1\leqslant 2x+10+2\sqrt{(x-1)(x+11)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x+11)}\geqslant 5x-9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\leqslant\frac{9}{5}\\ \begin{cases}x\geqslant\frac{9}{5}\\ 4x^2+40x-44\geqslant 25x^2-90x+81\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\leqslant\frac{9}{5}\\ \begin{cases}x\geqslant\frac{9}{5}\\ 21x^2-130x+125\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\leqslant\frac{9}{5}\\ \begin{cases}x\geqslant\frac{9}{5}\\ \frac{25}{21}\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\ 1<x\leqslant 5.$$

4. 第一个不等式可改写为 $\log_{\sin x}(2\cos x-3\cos 2x-1)\leqslant\log_{\sin x}2\sin^2 x$, 其等价于

$$\begin{cases}0<\sin x<1\\ 2\cos x-3\cos 2x-1\geqslant 2\sin^2 x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<\sin x<1\\ 4\cos^2 x-2\cos x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<\sin x<1\\ 0\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

可求出如上最后一个不等式组的解集为 $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. 该解集与区间 $[-\pi, 2\pi]$ 的交集为 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. 该等式可变形为:

$$mn(n^2-2) - 2m(n^2-2) + (n^2-2) = 14 \iff mn - 2m + 1 = \frac{14}{n^2-2}.$$

当 $m, n \in \mathbb{Z}$ 时, 上面最终所得等式的左侧恒为整数, 因而右侧也为整数. 故 $n^2 - 2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$, 即 $n = \pm 1$, $n = 0$, $n = \pm 2$, $n = \pm 3$, 或 $n = \pm 4$. 只需逐一讨论这些可能的取值:

$$n = 1 \Rightarrow -m + 1 = -14 \Rightarrow m = 15; \quad n = -1 \Rightarrow -3m + 1 = -14 \Rightarrow m = 5;$$

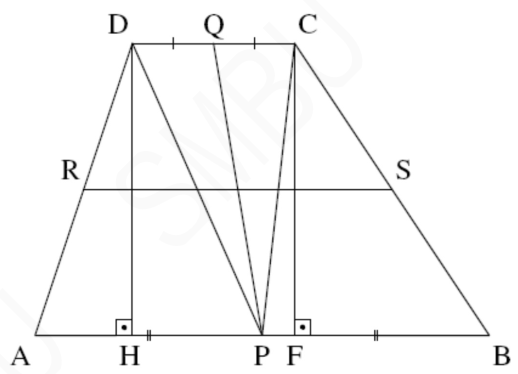
$$n = 0 \Rightarrow -2m + 1 = -7 \Rightarrow m = 4;$$

$$n = -2 \Rightarrow -4m + 1 = 7 \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}; \quad n = 2 \Rightarrow 1 = 7 \Rightarrow \text{矛盾};$$

$$n = -3 \Rightarrow -5m + 1 = 2 \Rightarrow m = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}; \quad n = 3 \Rightarrow m + 1 = 2 \Rightarrow m = 1;$$

$$n = -4 \Rightarrow -6m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0; \quad n = 4 \Rightarrow 2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0.$$

6. 如图所示, 三角形 DPQ 与 CPQ 有相等的底与高, 从而面积相等.



再由题设条件, 可知三角形 ADP 与 BCP 面积相等. 设 DH 与 CF 分别为这两个三角形的高, 由三角形面积公式, 有

$$S_{ADP} = \frac{AP \cdot DH}{2}, \; S_{BCP} = \frac{BP \cdot CF}{2}.$$

注意到 $AP = BP$, 上式可推出 $DH = CF$. 因 $DH \parallel CF$, 可知 $DCFH$ 为平行四边形, 从而 $AB \parallel CD$, $ABCD$ 为梯形.

进一步, 由题设条件, 可设 $CD = x$, $AB = 3x$. 线段 RS 为 AD 与 BC 的中点连线 – 即梯形 $ABCD$ 的中线, 从而 $RS = 2x$. 四边形 $ARSB$ 与 $DRSC$ 也是梯形, 且注意到其高相等 (均为梯形 $ABCD$ 的高 h 的一半). 从而,

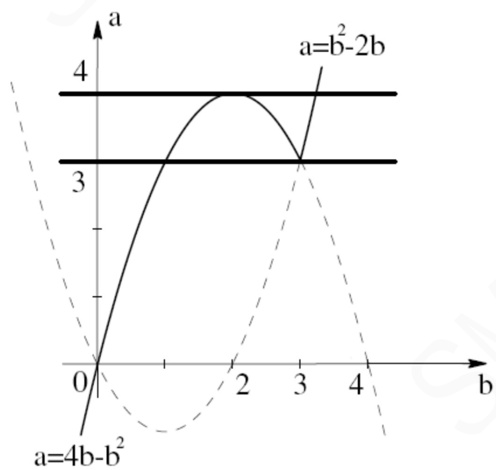
$$\frac{S_{ARSB}}{S_{DRSC}} = \frac{\frac{3x+2x}{2} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{x+2x}{2} \cdot \frac{h}{2}} = \frac{5}{3}.$$

7. 对任意取定的常数 a, 该方程仅当 b 满足条件 $a = b(|b-3|+1)$ 时无解. 因而, 我们只需要找到 a 使得关于 b 的方程 $a = b(|b-3|+1)$ 恰好有两个互异的解. 通过画图能够很容易求解: 如图所示, 函数

$$f(b) = b(|b-3|+1)$$

的图像由两段抛物线组成:

$$f(b) = b^2 - 2b \text{ 当 } b \geqslant 3, \qquad f(b) = 4b - b^2 \text{ 当 } b \leqslant 3.$$



显然, 若水平直线 $a = \text{const}$ 与该图像恰好交于两点, 则 $\text{const} = 3$ 或 4.

8. 设 $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$, 则

$$x - \sqrt{3} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \left(x - \sqrt{3}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 + 9x - 2 = 3\sqrt{3}(x^2+1) \Rightarrow (x^3 + 9x - 2)^2 = 27(x^2+1)^2.$$

将上面最后等式两端括号展开并合并同类项, 得 $x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23 = 0$.