# 数学试题

## 选择题部分(共 40 分)

**一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 已知集合 $P=\{x\mid 1<x<4\}$，$Q=\{x\mid 2<x<3\}$，则 $P\cap Q=$

A. $\{x\mid 1<x\leq 2\}$　　B. $\{x\mid 2<x<3\}$　　C. $\{x\mid 3\leq x<4\}$　　D. $\{x\mid 1<x<4\}$

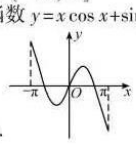
2. 已知 $a\in\mathbf{R}$，若 $a-1+(a-2)\mathrm{i}$（i 为虚数单位）是实数，则 $a=$

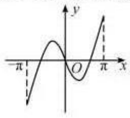
A. 1　　B. $-1$　　C. 2　　D. $-2$

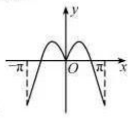
3. 若实数 $x$，$y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y+1\leq 0,\\ x+y-3\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的取值范围是

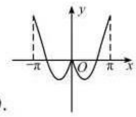
A. $(-\infty,4]$　　B. $[4,+\infty)$　　C. $[5,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

4. 函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的图象可能是


A.


B.

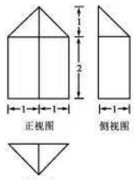

C.


D.

5. 某几何体的三视图(单位:cm)如图所示，则该几何体的体积(单位:$cm^3$)是

A. $\frac{7}{3}$  B. $\frac{14}{3}$

C. 3  D. 6



(第5题图)

6. 已知空间中不过同一点的三条直线 $l$, $m$, $n$. “$l$, $m$, $n$ 共面”是“$l$, $m$, $n$ 两两相交”的

A. 充分不必要条件  B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件  D. 既不充分也不必要条件

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，公差 $d\neq0$，且$\frac{a_1}{d}\leqslant1$. 记 $b_1=S_2$，$b_{n+1}=S_{2n+2}-S_{2n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，下列等式不可能成立的是

A. $2a_4=a_2+a_6$  B. $2b_4=b_2+b_6$  C. $a_4^2=a_2a_8$  D. $b_4^2=b_2b_8$

8. 已知点 $O(0,0)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$. 设点 $P$ 满足 $|PA|+|PB|=2$，且 $P$ 为函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 图象上的点，则 $|OP|=$

A. $\frac{\sqrt{22}}{2}$  B. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$  C. $\sqrt{7}$  D. $\sqrt{10}$

9. 已知 $a$, $b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq0$，对于任意 $x\geqslant0$ 均有$(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geqslant0$，则

A. $a<0$  B. $a>0$  C. $b<0$  D. $b>0$

10. 设集合 $S$, $T$, $S\subseteq\mathbf{N}^*$，$T\subseteq\mathbf{N}^*$，$S$, $T$ 中至少有 2 个元素，且 $S$, $T$ 满足:①对于任意的 $x$, $y\in S$，若 $x\neq y$，则 $xy\in T$;②对于任意的 $x$, $y\in T$，若 $x<y$，则$\frac{y}{x}\in S$. 下列命题正确的是

A. 若 $S$ 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 7 个元素  B. 若 $S$ 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 6 个元素

C. 若 $S$ 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 5 个元素  D. 若 $S$ 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 4 个元素

## 非选择题部分(共110分)

**二、填空题：本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。**

11. 我国古代数学家杨辉，朱世杰等研究过高阶等差数列的求和问题，如数列$\{\frac{n(n+1)}{2}\}$就是二阶等差数列. 数列$\{\frac{n(n+1)}{2}\}(n\in\mathbf{N}^*)$的前3项和是______.

12. 二项展开式$(1+2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_4=$______，$a_1+a_3+a_5=$______.

13. 已知 $\tan\theta=2$，则 $\cos2\theta=$______，$\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$______.

14. 已知圆锥的侧面积(单位:$cm^2$)为 $2\pi$，且它的侧面展开图是一个半圆，则这个圆锥的底面半径(单位:cm)是______.

15. 已知直线 $y=kx+b(k>0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 和圆 $(x-4)^2+y^2=1$ 均相切，则 $k=$______，$b=$______.

16. 盒中有4个球，其中1个红球，1个绿球，2个黄球. 从盒中随机取球，每次取1个，不放回，直到取出红球为止. 设此过程中取到黄球的个数为 $\xi$，则 $P(\xi=0)=$______，$E(\xi)=$______.

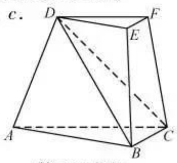
17. 已知平面单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 满足 $|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta$，则$\cos^2\theta$ 的最小值是______.

**三、解答题：本大题共5小题，共74分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

18. (本题满分14分)在锐角$\triangle ABC$中，角 $A$, $B$, $C$ 所对的边分别为 $a$, $b$, $c$. 已知 $2b\sin A-\sqrt{3}a=0$.

(Ⅰ)求角 $B$ 的大小;(Ⅱ)求 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围.

19. (本题满分15分)如图，在三棱台 $ABC-DEF$ 中，平面 $ACFD\perp$平面 $ABC$，$\angle ACB=\angle ACD=45°$，$DC=2BC$.(Ⅰ)证明:$EF\perp DB$;(Ⅱ)求直线 $DF$ 与平面 $DBC$ 所成角的正弦值.



(第19题图)

20.（本题满分15分）已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足$a_1=b_1=c_1=1$，$c_n=a_{n+1}-a_n$，$c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}c_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

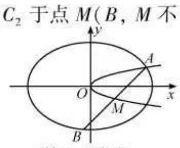
（Ⅰ）若$\{b_n\}$为等比数列，公比$q>0$，且$b_1+b_2=6b_3$，求$q$的值及数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$\{b_n\}$为等差数列，公差$d>0$，证明：$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n<1+\frac{1}{d}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

21.（本题满分15分）如图，已知椭圆$C_1$：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，抛物线$C_2$：$y^2=2px(p>0)$，点$A$是椭圆$C_1$与抛物线$C_2$的交点，过点$A$的直线$l$交椭圆$C_1$于点$B$，交抛物线$C_2$于点$M$($B$，$M$不同于$A$).

（Ⅰ）若$p=\frac{1}{16}$，求抛物线$C_2$的焦点坐标；

（Ⅱ）若存在不过原点的直线$l$使$M$为线段$AB$的中点，求$p$的最大值.




（第21题图）

22.（本题满分15分）已知$1<a\le 2$，函数$f(x)=e^x-x-a$，其中$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数.

（Ⅰ）证明：函数$y=f(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一零点；

（Ⅱ）记$x_0$为函数$y=f(x)$在$(0,+\infty)$上的零点，证明：（ⅰ）$\sqrt{a-1}\le x_0\le\sqrt{2(a-1)}$；

（ⅱ）$x_0f(e^{x_0})\ge(e-1)(a-1)a$.

# 数学试题参考答案

**一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，共40分。**

1. B　2. C　3. B　4. A　5. A　6. B　7. D　8. D　9. C　10. A

**二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题6分，单空题每题4分，共36分。**

11. 10　12. 80，122　13. $-\frac{3}{5}$，$\frac{1}{3}$　14. 1

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$，$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　16. $\frac{1}{3}$，1　17. $\frac{28}{29}$

**三、解答题：本大题共5小题，共74分。**

**18. 本题主要考查三角函数及其变换、正弦定理等基础知识，同时考查数学运算等素养。满分14分。**

（Ⅰ）由正弦定理得　$2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A$，

故　$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由题意得　$B=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）由$A+B+C=\pi$得　$C=\frac{2\pi}{3}-A$，

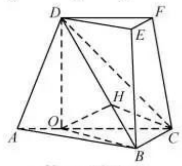
由$\triangle ABC$是锐角三角形得　$A\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$.

由$\cos C=\cos(\frac{2\pi}{3}-A)=-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$得

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}=\sin(A+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\in(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}].$$

故$\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3}{2}]$.

**19. 本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查直观想象和数学运算等素养。满分15分。**




（第19题图）

（Ⅰ）如图，过点$D$作$DO\perp AC$，交直线$AC$于点$O$，连结$OB$.

由$\angle ACD=45°$，$DO\perp AC$得$CD=\sqrt{2}CO$，

由平面$ACFD\perp$平面$ABC$得$DO\perp$平面$ABC$，所以

$DO\perp BC$.

由 $\angle ACB=45^\circ$，$BC=\frac{1}{2}CD=\frac{\sqrt{2}}{2}CO$ 得 $BO\perp BC$．

所以 $BC\perp$ 平面 $BDO$，故 $BC\perp DB$．

由三棱台 $ABC-DEF$ 得 $BC/\!/EF$，所以 $EF\perp DB$．

（Ⅱ）方法一：

过点 $O$ 作 $OH\perp BD$，交直线 $BD$ 于点 $H$，连结 $CH$．

由三棱台 $ABC-DEF$ 得 $DF/\!/CO$，所以直线 $DF$ 与平面 $DBC$ 所成角等于直线 $CO$ 与平面 $DBC$ 所成角．

由 $BC\perp$ 平面 $BDO$ 得 $OH\perp BC$，故 $OH\perp$ 平面 $BCD$，所以 $\angle OCH$ 为直线 $CO$ 与平面 $DBC$ 所成角．

设 $CD=2\sqrt{2}$．

由 $DO=OC=2$，$BO=BC=\sqrt{2}$，得 $BD=\sqrt{6}$，$OH=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，所以

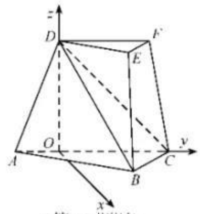
$$\sin\angle OCH=\frac{OH}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

因此，直线 $DF$ 与平面 $DBC$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

方法二：

由三棱台 $ABC-DEF$ 得 $DF/\!/CO$，所以直线 $DF$ 与平面 $DBC$ 所成角等于直线 $CO$ 与平面 $DBC$ 所成角，记为 $\theta$．

如图，以 $O$ 为原点，分别以射线 $OC$，$OD$ 为 $y$，$z$ 轴的正半轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$．




（第19题图）

设 $CD=2\sqrt{2}$．

由题意知各点坐标如下：

$O(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,2)$．

因此

$\overrightarrow{OC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,-2,2)$．

设平面 $BCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -2y+2z=0,\end{cases}$ 可取

$$\boldsymbol{n}=(1,1,1).$$

所以

$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因此，直线 $DF$ 与平面 $DBC$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

**20．本题主要考查等差数列、等比数列等基础知识，同时考查数学运算和逻辑推理等素养。满分15分。**

（Ⅰ）由 $b_1+b_2=6b_3$ 得 $1+q=6q^2$，

解得 $q=\frac{1}{2}$．

由 $c_{n+1}=4c_n$ 得 $c_n=4^{n-1}$．

由 $a_{n+1}-a_n=4^{n-1}$ 得 $a_n=a_1+1+4+\cdots+4^{n-2}=\frac{4^{n-1}+2}{3}$．

（Ⅱ）由 $c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}c_n$ 得 $c_n=\frac{b_1b_2c_1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1+d}{d}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$，

所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\frac{1+d}{d}\left(1-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$，

由 $b_1=1$，$d>0$ 得 $b_{n+1}>0$，因此

$$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n<1+\frac{1}{d},\ n\in\mathbf{N}^*.$$

**21. 本题主要考查抛物线的几何性质，直线与椭圆、抛物线的位置关系等基础知识，同时考查数学抽象、数学运算与逻辑推理等素养。满分15分。**

（Ⅰ）由 $p=\frac{1}{16}$ 得 $C_2$ 的焦点坐标是 $(\frac{1}{32}, 0)$.

（Ⅱ）由题意可设直线 $l: x=my+t(m\neq 0, t\neq 0)$，点 $A(x_0, y_0)$.

将直线 $l$ 的方程代入椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得

$$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0,$$

所以点 $M$ 的纵坐标

$$y_M=-\frac{mt}{m^2+2}.$$

将直线 $l$ 的方程代入抛物线 $C_2: y^2=2px$ 得

$$y^2-2pmy-2pt=0,$$

所以 $y_0y_M=-2pt$，解得

$$y_0=\frac{2p(m^2+2)}{m},$$

因此

$$x_0=\frac{2p(m^2+2)^2}{m^2}.$$

由 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$ 得 $\frac{1}{p^2}=4(m+\frac{2}{m})^2+2(m+\frac{2}{m})^4\geqslant 160$,

所以当 $m=\sqrt{2}$，$t=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 时，$p$ 取到最大值 $\frac{\sqrt{10}}{40}$.

**22. 本题主要考查函数的单调性、零点，导数的运算及其应用，同时考查数学抽象、逻辑推理与数学运算等素养。满分15分。**

（Ⅰ）因为 $f(0)=1-a<0$，$f(2)=e^2-2-a\geqslant e^2-4>0$，所以 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在零点.

因为 $f'(x)=e^x-1$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点.

（Ⅱ）（ⅰ）令 $g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(x\geqslant 0)$，$g'(x)=e^x-x-1=f(x)+a-1$，由（Ⅰ）知函数 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，故当 $x>0$ 时，$g'(x)>g'(0)=0$，所以函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增，故 $g(x)\geqslant g(0)=0$.

由 $g(\sqrt{2(a-1)})\geqslant 0$ 得 $f(\sqrt{2(a-1)})=e^{\sqrt{2(a-1)}}-\sqrt{2(a-1)}-a\geqslant 0=f(x_0)$,

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增，故 $\sqrt{2(a-1)}\geqslant x_0$.

令 $h(x)=e^x-x^2-x-1(0\leqslant x\leqslant 1)$，$h'(x)=e^x-2x-1$,

令 $h_1(x)=e^x-2x-1(0\leqslant x\leqslant 1)$，$h_1'(x)=e^x-2$，所以

| $x$ | 0 | $(0, \ln 2)$ | $\ln 2$ | $(\ln 2, 1)$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_1'(x)$ | $-1$ | $-$ | 0 | $+$ | $e-2$ |
| $h_1(x)$ | 0 | ↘ | | ↗ | $e-3$ |

故当 $0<x<1$ 时，$h_1(x)<0$，即 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调递减，因此当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$h(x)\leqslant h(0)=0$.

由 $h(\sqrt{a-1})\leqslant 0$ 得 $f(\sqrt{a-1})=e^{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a-1}-a\leqslant 0=f(x_0)$,

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增，故 $\sqrt{a-1}\leqslant x_0$.

综上，$\sqrt{a-1}\leqslant x_0\leqslant\sqrt{2(a-1)}$.

（ⅱ）令 $u(x)=e^x-(e-1)x-1$，$u'(x)=e^x-(e-1)$，所以当 $x>1$ 时，$u'(x)>0$，故函数 $u(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增，因此 $u(x)\geqslant u(1)=0$.

由 $e^{x_0}=x_0+a$ 可得

$$x_0f(e^{x_0})=x_0f(x_0+a)=(e^a-1)x_0^2+a(e^a-2)x_0\geqslant(e-1)ax_0^2,$$

由 $x_0\geqslant\sqrt{a-1}$ 得 $x_0f(e^{x_0})\geqslant(e-1)(a-1)a$.

## 关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。


**关注后获取更多资料：**

1、回复“**2020 高考真题**”即可下载 2020 年全国高考真题及答案

2、回复“**百问百答**”,即可获取《强基计划政策百问百答》