参考答案及解析

一、选择题

1. A　2. D　3. B　4. A　5. B　6. D　7. D　8. D

二、选择题

9. BCD　10. AC　11. ABC　12. AC

三、填空题

13. 0.5

14. 20π

15. 4

16. 2　$\{1,2,3,4\}$

四、解答题

17. **解:**(1)若 AC 平分 $\angle BCD$,

则 $\angle BCD=2\angle ACB=2\angle ACD$,

所以 $\cos\angle BCD=2\cos^2\angle ACB-1=-\frac{3}{5}$,　(2分)

因为 $\cos\angle ACB>0$,所以 $\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

由余弦定理 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos\angle ACB$,

得 $AC^2-\frac{2\sqrt{5}}{5}AC-3=0$,　(4分)

解得 $AC=\sqrt{5}$ 或 $AC=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$(舍),

所以 $AC=\sqrt{5}$.　(5分)

(2)因为 $\cos\angle BCD=-\frac{3}{5}$,

所以 $\sin\angle BCD=\sqrt{1-\cos^2\angle BCD}=\frac{4}{5}$,　(6分)

又因为 $\angle CBD=45°$,

所以 $\sin\angle CDB=\sin(180°-\angle BCD-45°)=\sin(\angle BCD+45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\angle BCD+\cos\angle BCD)=\frac{\sqrt{2}}{10}$,　(8分)

所以在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理 $\frac{BC}{\sin\angle CDB}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$,

可得 $CD=\frac{BC\cdot\sin\angle CBD}{\sin\angle CDB}=5$,

即 $CD=5$.　(10分)

18. **解:**(1)因为 $S_n=2a_n-2(n\in\mathbf{N}^*)$,①

当 $n=1$ 时,可得 $a_1=2$,

当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-2(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,②

由①−②得 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,　(2分)

由 a_n 为正项数列,得 $\{a_n\}$ 是首项为2,公比为2的等比数列,因此可得 $a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$,

由于数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的乘积为 $n!$,

当 $n=1$ 时,得 $b_1=1$;　(4分)

当 $n\geqslant2$ 时,得 $b_n=\frac{n!}{(n-1)!}=n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

因为 $b_1=1$ 符合通项,故得 $b_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$.　(6分)

(2)由(1)可知,$c_n=a_nb_n=n\cdot2^n$,

则 $T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$,①

即 $2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$,②

则①−②得:$-T_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}$,　(10分)

即 $T_n=n\times2^{n+1}-\frac{2-2^{n+1}}{1-2}=(n-1)2^{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$.　(12分)

19. (1)**证明:**取 AD 中点 O,连接 OP,OB,

因为在矩形 $ABCD$ 中,

$AB=\sqrt{2},AD=2$,所以 $AO=1$,所以 $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AO}$,

又 $\angle DAB=\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,所以 $\triangle OAB\backsim\triangle ABC$,　(2分)

所以 $\angle CAB=\angle AOB$,因为 $\angle CAB+\angle OAC=\frac{\pi}{2}$,

所以 $\angle AOB+\angle OAC=\frac{\pi}{2}$,所以 $OB\perp AC$,

又因为 $AC\perp PB$,$PB\cap OB=B$,且 $PB,OB\subset$ 平面 POB,

所以 $AC\perp$ 平面 POB,　(4分)

因为 $PO\subset$ 平面 POB,所以 $AC\perp PO$,

因为 $PA=PD$,O 为 AD 的中点,所以 $PO\perp AD$,

又 $PO\perp AC$,$AC\cap AD=A$,$AC,AD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,

因为 $PO\subset$ 平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.　(6分)

(2)**解:**因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,$AB\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AB\perp PO$,

又 $AB\perp AD$,$AD\cap PO=O$,$AD,PO\subset$ 平面 PAD,

所以 $AB\perp$ 平面 PAD,

又 $PA\subset$ 平面 PAD,所以 $AB\perp PA$,

又 $DA\perp AB$,$PA\subset$ 平面 PAB,$DA\subset$ 平面 ABD,平面 $PAB\cap$ 平面 $ABD=AB$,

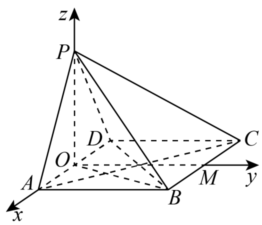
所以 $\angle PAD$ 即为二面角 P-AB-D 的平面角,

因为 $PO\perp AD$,且 $\angle PAD=\frac{\pi}{4}$,　(8分)

所以 $\tan\angle PAD=\frac{PO}{AO}=1$,所以 $OP=1$,

作 BC 的中点 M,连接 OM,以 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}\}$ 为正交基

底,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(1,0,0)$,$C(-1,\sqrt{2},0)$,$P(0,0,1)$,

所以$\overrightarrow{AP}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,\sqrt{2},0)$,

设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,x)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-x+z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+\sqrt{2}y=0,\end{cases}$取 $x=1$,则 $y=\sqrt{2}$,$z=1$,

所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},1)$,　　(10 分)

因为平面 PAD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$,

设锐二面角 $D\text{-}AP\text{-}C$ 为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(12 分)

20. **解**:(1)由题意可得关于对员工敬业精神和员工管理水平评价的 2×2 列联表

	对员工管理水平满意	对员工管理水平不满意	合计
对员工敬业精神满意	50	30	80
对员工敬业精神不满意	40	80	120
合计	90	110	200

零假设为 H_0:对员工敬业精神满意与对员工管理水平满意无关.

据表中数据计算得:$\chi^2=\dfrac{200\times(50\times80-30\times40)^2}{80\times120\times90\times110}\approx$

$16.498>6.635=x_{0.01}$,　　(3 分)

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为对员工敬业精神满意与对员工管理水平满意有关联.　　(4 分)

(2)对员工敬业精神和对员工管理水平都满意的概率为$\dfrac{1}{4}$,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

其中 $P(X=0)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$;

$P(X=1)=C_3^1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{27}{64}$;

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{64}$;

$P(X=3)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{1}{64}$.　　(6 分)

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

则 $E(X)=0\times\dfrac{27}{64}+1\times\dfrac{27}{64}+2\times\dfrac{9}{64}+3\times\dfrac{1}{64}=\dfrac{3}{4}$.

(8 分)

(3)$T(B|A)=\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}=\dfrac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}}=\dfrac{P(AB)}{P(A\overline{B})}=\dfrac{n(AB)}{n(A\overline{B})}=$

$\dfrac{80}{30}=\dfrac{8}{3}$,所以估计 $T(B|A)$的值为$\dfrac{8}{3}$.　　(12 分)

21. **解**:(1)当 $k=m=1$ 时,直线 $l:y=x+1$,

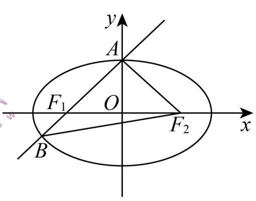
椭圆上顶点为$(0,1)$,$b=1$,连接 AF_1,BF_1,

有$|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a$,　　(2 分)

而$\triangle ABF_2$的周长为 $4a$,

所以 l 经过 F_1,故 $F_1(-1,0)$,所以 $a^2=1+1=2$,

所以 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.　　(4 分)

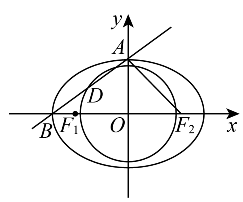


(2)联立直线 l 与 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的方程,有$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$,

$\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-2)=4(4k^2+2-2m^2)>0$,$2k^2>m^2-1$,　　(6 分)



有 $D\left(-\dfrac{2km}{1+2k^2},\dfrac{m}{1+2k^2}\right)$,

由 D 在圆 $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$上,

有$\left(\dfrac{2km}{1+2k^2}\right)^2+\left(\dfrac{m}{1+2k^2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$,

整理有 $m^2=\dfrac{3(1+2k^2)^2}{4+16k^2}$,

原点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\times\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{1+2k^2-m^2}}{1+2k^2}$，　　(10 分)

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|d=$

$\dfrac{\sqrt{2m^2(1+2k^2-m^2)}}{1+2k^2}$，

$S_{\triangle OAB}=\dfrac{\sqrt{2m^2(1+2k^2-m^2)}}{1+2k^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}(m^2+1+2k^2-m^2)}{2(1+2k^2)}=$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

等号成立时 $m^2=1+2k^2-m^2$，结合 $m^2=\dfrac{3(1+2k^2)^2}{4+16k^2}$，

解得 $k^2=\dfrac{1}{2}$，$m^2=1$，

所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　(12 分)

22. **解**：(1)因为 $2x^2+2-4x=2(x-1)^2\geqslant 0$ 恒成立，且 $4x-(-x^2+4x)=x^2\geqslant 0$ 恒成立，

所以当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$2x^2+2\geqslant 4x\geqslant -x^2+4x$ 恒成立，

故 $y=h_1(x)$ 是 $y=2x^2+2$ 与 $y=-x^2+4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的“分割函数”，　　(2 分)

又因为 $x+1-(-x^2+4x)=x^2-3x+1$，当 $x=0$ 与 1 时，其值分别为 1 与 -1，

所以 $h_2(x)\geqslant -x^2+4x$ 与 $h_2(x)\leqslant -x^2+4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都不恒成立，

故 $y=h_2(x)$ 不是 $y=2x^2+2$ 与 $y=-x^2+4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的“分割函数”.　　(4 分)

(2)设 $y=ax^2+cx+d(a\neq 0)$ 是 $y=2x^2+2$ 与 $y=4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的“分割函数”，

则 $2x^2+2\geqslant ax^2+cx+d\geqslant 4x$ 对一切实数 x 恒成立，

$(2x^2+2)'=4x$，

当 $x=1$ 时，它的值为 4，可知 $y=2x^2+2$ 的图像在 $x=1$ 处的切线为直线 $y=4x$，

它也是 $y=ax^2+cx+d$ 的图像在 $x=1$ 处的切线，

所以 $\begin{cases}2a+c=4,\\a+c+d=4,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}c=4-2a,\\d=a.\end{cases}$　　(6 分)

所以 $2x^2+2\geqslant ax^2+(4-2a)x+a\geqslant 4x$ 对一切实数 x 恒成立，

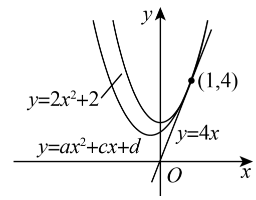
即 $(2-a)(x-1)^2\geqslant 0$ 且 $a(x-1)^2\geqslant 0$ 对一切实数 x 恒成立，

可得 $2-a\geqslant 0$ 且 $a>0$，即 $0<a\leqslant 2$，

又 $a=2$ 时，$y=ax^2+(4-2a)x+a$ 与 $y=2x^2+2$ 为相同函数，不合题意，

故所求的函数为 $y=ax^2+(4-2a)x+a(0<a<2)$.

(8 分)

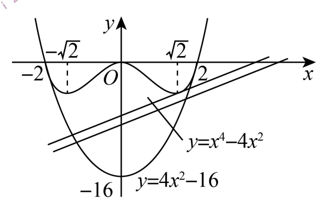


(3)关于函数 $y=x^4-4x^2$，令 $y'=4x^3-8x=0$，可得 $x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{2}$，

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{2})$ 与 $x\in(0,\sqrt{2})$ 时，$y'<0$；当 $x\in(-\sqrt{2},0)$ 与 $x\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时，$y'>0$.

可知 $\pm\sqrt{2}$ 是函数 $y=x^4-4x^2$ 的极小值点，0 是极大值点，

该函数与 $y=4x^2-16$ 的图像如图所示.



由 $y=kx+b$ 为 $y=x^4-4x^2$ 与 $y=4x^2-16$ 在区间 $[m,n]$ 上的“分割函数”，

故存在 b_0 使得 $b\leqslant b_0$ 且直线 $y=kx+b_0$ 与 $y=x^4-4x^2$ 的图像相切，

并且切点横坐标 $t\in[-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},2]$，此时切线方程为 $y=(4t^3-8t)x+4t^2-3t^4$，

即 $k=4t^3-8t$，$b_0=4t^2-3t^4$，　　(10 分)

设直线 $y=kx+b$ 与 $y=4x^2-16$ 的图像交于点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

则由 $\begin{cases}y=kx+b,\\y=4x^2-16,\end{cases}$ 可得 $4x^2-kx-16-b=0$，

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{k^2}{16}+16+b}\leqslant$

$\sqrt{\dfrac{k^2}{16}+16+b_0}=\sqrt{(t^3-2t)^2+16+4t^2-3t^4}=$

$\sqrt{t^6-7t^4+8t^2+16}=\sqrt{s^3-7s^2+8s+16}\,(s=t^2\in[2,4])$，

令 $k(s)=s^3-7s^2+8s+16\,(s\in[2,4])$，

$k'(s)=3s^2-14s+8=(3s-2)(s-4)\leqslant 0$（仅当 $s=4$ 时，$k'(s)=0$）.

所以 $k(s)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减，故 $k(s)$ 的最大值为 $k(2)=12$，可知 $|x_1-x_2|$ 的最大值为 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，

所以 $n-m$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$.　　(12 分)