江苏省“百校大联考”高三年级第二次考试
数学试卷参考答案

1. 2　2. $(1,2]$　3. 充分必要　4. 1　5. -2　6. $\frac{\pi}{2}$　7. $\frac{1}{2}$　8. 9　9. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$　10. $(-1,\frac{1}{2})$

11. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　设 $f(x)=x+\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a-\ln x$，

则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，得 $f(x)_{\min}=f(1)=1+\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a$，

所以 $1+\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a>0$，解得 $a>2$ 或 $a<1$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

12. $(0,4)$　由 $\angle PAQ=\frac{\pi}{3}$，设 $\angle BAQ=\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{6})$，则 $\angle BAP=\theta+\frac{\pi}{3}$.

在 Rt$\triangle ABP$ 和 Rt$\triangle ABQ$ 中，可得 $AQ=4\cos\theta$，$AP=4\cos(\theta+\frac{\pi}{3})$，

则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=4\cos\theta\cdot4\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}=8\cos\theta\cos(\theta+\frac{\pi}{3})$

$=8\cos\theta(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3})=8(\frac{\cos^2\theta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta)$

$=4(\frac{\cos 2\theta+1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta)$

$=4\cos(2\theta+\frac{\pi}{3})+2$.

由 $\theta\in(0,\frac{\pi}{6})$，得 $2\theta+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，所以 $-\frac{1}{2}<\cos(2\theta+\frac{\pi}{3})<\frac{1}{2}$，

故 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\in(0,4)$.

13. $\frac{\pi}{2}$　因为 $f'(x)=\cos x$，所以在点 A 处的切线的方程为 $y-\sin\alpha=\cos\alpha(x-\alpha)$.

又因为直线 l 经过点 $(\alpha-\pi,\sin(\alpha-\pi))$，所以 $\sin(\alpha-\pi)-\sin\alpha=\cos\alpha(\alpha-\pi-\alpha)$，

即 $-2\sin\alpha=-\pi\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=\frac{\pi}{2}$.

14. $(\frac{3}{4},\frac{5}{4})\cup\{\frac{1}{4}\}$　令 $t=f(x)$，方程 $t^2-2at+a^2-\frac{1}{16}=(t-(a+\frac{1}{4}))(t-(a-\frac{1}{4}))=0$，

得 $t_1=a+\frac{1}{4}$，$t_2=a-\frac{1}{4}$，根据 $y=f(x)$ 的图象，得如下简图：

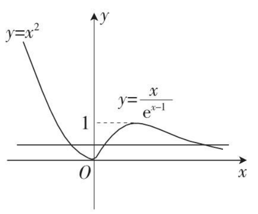

图 1

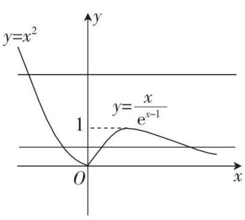

图 2

①由 $a-\frac{1}{4}=0$，得 $a=\frac{1}{4}$，此时 $t_1=a+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，符合题意；

②由$\begin{cases}a+\frac{1}{4}>1,\\0<a-\frac{1}{4}<1,\end{cases}$ 解得$\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$.

综上,a 的取值集合为$(\frac{3}{4},\frac{5}{4})\cup\{\frac{1}{4}\}$.

15. 解:(1)当命题 p 为真命题时,$m=x^2+x$,易知 $g(x)=x^2+x$ 在$(1,2)$上单调递增,得 $2<m<6$. ……… 4 分

(2)当命题 q 为真命题时,$f'(x)=\frac{1}{x}-m\geqslant 0$,得 $m\leqslant\frac{1}{x}$对于$x\in[1,2]$恒成立,

所以 $m\leqslant\frac{1}{2}$. …………………………………………………………………………………… 8 分

因为"p 或 q"为真命题,命题"p 且 q"为假命题,

所以命题 p 为真,命题 q 为假,或命题 p 为假,命题 q 为真.

①若命题 p 为真,命题 q 为假,则$\begin{cases}2<m<6,\\m>\frac{1}{2},\end{cases}$ 得 $2<m<6$; …………………………………………… 10 分

②若命题 p 为假,命题 q 为真,则$\begin{cases}m\geqslant 6\text{ 或 }m\leqslant 2,\\m\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 得 $m\leqslant\frac{1}{2}$. ………………………………………… 12 分

综上所述,m 的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]\cup(2,6)$. ……………………………………………………… 14 分

16. 解:(1)$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$

$=\frac{1}{2}\sin x+(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4})(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4})$

$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$. …………………………………………………………………………… 4 分

当 $x-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi),k\in\mathbf{Z}$,即 $x\in(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi),k\in\mathbf{Z}$ 时,$f(x)$单调递增,

故 $f(x)$的单调递增区间为$(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi),k\in\mathbf{Z}$. …………………………………………… 6 分

(2)由 $f(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{6}}{4}$,得 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{3}$或 $\alpha-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

即 $\alpha=2k\pi+\frac{7\pi}{12}$或 $\alpha=2k\pi+\frac{11\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$. ……………………………………………………… 10 分

所以 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\sin(4k\pi+\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………… 12 分

或 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\sin(4k\pi+\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sin 2\pi=0$.

综上可知,$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})$的值为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$或 0. ……………………………………………………… 14 分

17. 解:(1)因为点 D 为边 AB 的中点,

所以$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$, …………………………………………………………………… 2 分

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{CB}|^2-|\overrightarrow{CA}|^2)=\frac{7}{2}$. …………………………………… 6 分

(2)由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$，得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，

所以$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos C$. …………………………………… 9 分

由余弦定理得

$|AB|\cdot|AC|\cdot\frac{|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2}{2|AB|\cdot|AC|}=|AC|^2+|AC|\cdot|BC|\cdot\frac{|AC|^2+|BC|^2-|AB|^2}{2|AC|\cdot|BC|}$，

化简得$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$，

所以$\triangle ABC$为直角三角形. …………………………………… 14 分

18. 解：(1)设顶点 B 翻折到 AD 边上的点为 B'，则由题得 $BM=B'M=l\sin\theta$，$AM=l\sin\theta\cos 2\theta$.

因为 $l\sin\theta+l\sin\theta\cos 2\theta=6$，所以 $l=\frac{6}{\sin\theta(1+\cos 2\theta)}=\frac{3}{\sin\theta\cos^2\theta}$，即 l 与 θ 的函数表达式为 $l=\frac{3}{\sin\theta\cos^2\theta}$.

…………………………………… 2 分

由题意得 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，首先，利用 $l\sin\theta\leqslant 6$，可知 $\cos^2\theta\geqslant\frac{1}{2}$，

即 $\cos\theta\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，得到 $\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$.

又由 $l\cos\theta\leqslant 12$，可知 $\sin 2\theta\geqslant\frac{1}{2}$，即 $\theta\geqslant\frac{\pi}{12}$，故 $\theta\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$. …………………………………… 4 分

(2)$x=l\sin\theta=\frac{3}{\cos^2\theta}=3(1+\tan^2\theta)$.

当 $\theta\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$时，$\tan\theta\in[2-\sqrt{3},1]$，解得 $24-12\sqrt{3}\leqslant x\leqslant 6$，…………………………………… 8 分

则 x 的取值范围是$[24-12\sqrt{3},6]$.

(3)(法一)$S=\frac{1}{2}l\sin\theta\cdot l\cos\theta=\frac{1}{2}l^2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{2\sin\theta\cos^3\theta}$， …………………………………… 10 分

所以 $S=\frac{9}{2\sin\theta\cos^3\theta}=\frac{9(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}{2\sin\theta\cos^3\theta}=\frac{9(\tan^2\theta+1)^2}{2\tan\theta}$.

设 $\tan\theta=t$，因为 $\theta\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$，所以 $t\in[2-\sqrt{3},1]$，

则 $S(t)=\frac{9}{2}\cdot\frac{(t^2+1)^2}{t}=\frac{9}{2}(t^3+2t+\frac{1}{t})$，…………………………………… 13 分

$S'(t)=\frac{9}{2}(3t^2+2-\frac{1}{t^2})=\frac{9}{2}\cdot\frac{(3t^2-1)(t^2+1)}{t^2}$，

令 $S'(t)<0$，得 $2-\sqrt{3}\leqslant t<\frac{\sqrt{3}}{3}$；令 $S'(t)>0$，得$\frac{\sqrt{3}}{3}<t\leqslant 1$，

所以，$S(t)\geqslant S(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{9}{2}(\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3})=8\sqrt{3}$，此时 $BM=3(1+t^2)=4$. …………………………………… 15 分

所以，当 $BM=4$ 时，翻折后重合部分的三角形面积最小. …………………………………… 16 分

(法二)$S=\frac{1}{2}l\sin\theta\cdot l\cos\theta=\frac{1}{2}l^2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{2\sin\theta\cos^3\theta}$. …………………………………… 10 分

设 $g(\theta)=\sin\theta\cos^3\theta$，则 $g'(\theta)=\cos^2\theta(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta(1-4\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta(1+2\sin\theta)(1-2\sin\theta)$.

当 $g'(\theta)=0$ 时，$\sin\theta=\frac{1}{2}$，此时 $\theta=\frac{\pi}{6}$；…………………………………… 12 分

当 $g'(\theta)>0$ 时，$\sin\theta<\frac{1}{2}$，此时 $\theta\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6})$；

当 $g'(\theta)<0$ 时，$\sin\theta>\frac{1}{2}$，此时 $\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$.

列表如下：

θ	$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$
$g'(\theta)$	+	0	−
$g(\theta)$	↗	极大值	↘

所以，$g(\theta)\leqslant g(\frac{\pi}{6})$，$S\geqslant\frac{9}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^3}=8\sqrt{3}$，此时 $BM=3(1+\tan^2\theta)=4$. ……………………………………… 14 分

所以，当 $BM=4$ 时，翻折后重合部分的三角形面积最小. ……………………………………… 16 分

19. 解：(1) $f'(x)=\frac{-ax^2+(a-1)x+1}{x}=-\frac{ax^2-(a-1)x-1}{x}=-\frac{(ax+1)(x-1)}{x}$.

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{1-x}{x}$，当 $x\in[1,5]$ 时，$f'(x)=\frac{1-x}{x}\leqslant 0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(5)=-\frac{15a}{2}-5+\ln 5=-5+\ln 5$. ……………………………………… 2 分

②当 $a>0$，且 $x\in[1,5]$ 时，$f'(x)=-\frac{(ax+1)(x-1)}{x}\leqslant 0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(5)=-\frac{15a}{2}-5+\ln 5$.

综上所述，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{15a}{2}-5+\ln 5$. ……………………………………… 5 分

(2)①当 $a=-1$，且 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)+1-\frac{a}{2}>f(1)+1-\frac{a}{2}=0$，不符合题意. ……………………………………… 7 分

②当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$ 和 $(-\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间为 $(1,-\frac{1}{a})$.

$f(-\frac{4}{a})+1-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}a(-\frac{4}{a})^2+(a-1)(-\frac{4}{a})+\ln(-\frac{4}{a})+1-\frac{a}{2}=-\frac{4}{a}-3+\ln(-\frac{4}{a})-\frac{a}{2}$.

由 $-1<a<0$，得 $-\frac{1}{a}>1$，$-\frac{4}{a}>4$，

所以 $-\frac{4}{a}-3>0$，$\ln(-\frac{4}{a})>\ln 4>0$，$-\frac{a}{2}>0$，

所以 $f(-\frac{4}{a})+1-\frac{a}{2}>0$，不符合题意. ……………………………………… 10 分

③当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\frac{1}{a},1)$，

所以 $f(-\frac{1}{a})+1-\frac{a}{2}>f(1)+1-\frac{a}{2}=0$，不符合题意. ……………………………………… 12 分

④当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)=-\frac{(ax+1)(x-1)}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)+1-\frac{a}{2}\leqslant f(1)+1-\frac{a}{2}=-\frac{a}{2}+a-1+\ln 1+1-\frac{a}{2}=0$，符合题意. ……………………… 15 分

综上所述,a 的取值范围为$[0,+\infty)$. ………………………………………………………… 16 分

20.(1)解:由函数 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $x+y-3=0$,得 $f(1)=2,f'(1)=-1$.

又 $f(1)=p+q-2,f'(1)=-3+p$,于是 $p+q-2=2,-3+p=-1$,解得 $p=q=2$. ………………… 3 分

(2)证明:要证 $f(x_1),p+q-2,f(x_2)$成等差数列,只要证 $f(x_1)+f(x_2)=2(p+q-2)$.

函数 $f(x)$有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,又 $f'(x)=3x^2-6x+p$,

设 $3x^2-6x+p=0$ 的两个根为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,则 $x_1+x_2=2,x_1x_2=\dfrac{p}{3}$,

$f(x_1)+f(x_2)=x_1^3-3x_1^2+px_1+q+x_2^3-3x_2^2+px_2+q$

$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]-3[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+p(x_1+x_2)+2q$

$=2(p+q-2)$. ………………………………………………………………………………… 9 分

(3)解:由函数 $f(x)$有三个零点 $0,m,n$,

得 $f(0)=0$,解得 $q=0$,且 $x^2-3x+p=0$ 的两个根为 m,n,

于是$\begin{cases}\Delta=9-4p>0,\\ p\neq0,\end{cases}$解得 $p\in(-\infty,0)\cup(0,\dfrac{9}{4})$.

$f'(x)=3x^2-6x+p=0$ 有两个相异的实根,不妨设为 $t_1,t_2(t_1<t_2)$.

①当 $p\in(0,\dfrac{9}{4})$时,$0<m<t_2<n$,函数 $f(x)$在区间$[m,t_2]$上单调递减,在区间$[t_2,n]$上单调递增.又 $f(m)=f(n)=0$,故 $f(x)_{\max}=f(m)=f(n)=0$.

对任意的 $x\in[m,n]$,不等式 $f(x)\leqslant14+p$ 恒成立,

解得 $p\in(0,\dfrac{9}{4})$. ………………………………………………………………………… 13 分

②当 $p\in(-\infty,0)$时,$m<t_1<0<t_2<n$,函数 $f(x)$在区间$[t_1,t_2]$上单调递减,在区间$[t_2,n]$和$[m,t_1]$上单调递增.又 $f(m)=f(n)=0,3t_1^2-6t_1+p=0$,

故 $f(x)_{\max}=t_1^3-3t_1^2+pt_1=-t_1^2+\dfrac{2}{3}pt_1=(\dfrac{2}{3}p-2)t_1+\dfrac{1}{3}p$.

对任意的 $x\in[m,n]$,不等式 $f(x)\leqslant14+p$ 恒成立,

于是$(\dfrac{2}{3}p-2)t_1+\dfrac{1}{3}p\leqslant14+p$.又 $t_1=\dfrac{3-\sqrt{9-3p}}{3}$,故$(\dfrac{1}{3}p-1)\dfrac{3-\sqrt{9-3p}}{3}\leqslant7+\dfrac{1}{3}p$.

令 $\mu=\sqrt{9-3p}(\mu>3)$,则 $p=\dfrac{9-\mu^2}{3}$,

$\dfrac{-\mu^2(3-\mu)}{27}\leqslant7+\dfrac{9-\mu^2}{9}$,解得 $3<\mu\leqslant6$,即 $3<\sqrt{9-3p}\leqslant6$,$-9\leqslant p<0$,于是,$p\in[-9,0)$.

综上,p 的取值范围为$(0,\dfrac{9}{4})\cup[-9,0)$. ……………………………………………………… 16 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注