永州市2023年高考第三次适应性考试试卷

数学

命题人：陈全伟（东安一中）　刘魁（永州四中）
刘广奇（祁阳一中）　蒋昌龙（道县一中）
审题人：席俊雄（永州市教科院）

注意事项：

1.本试卷共150分，考试时量120分钟.

2.全部答案在答题卡上完成，答在本试题卷上无效.

3.考试结束后，只交答题卡.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若复数z满足$\overline{z}-3\mathrm{i}=z$，则复数$z$的虚部为

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

2.设集合$A=\{(x,y)|y=2x\}$，$B=\{(x,y)|y=x^3\}$，则$A\cap B$的元素个数是

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

3.已知$\cos\theta-\cos2\theta-1=0$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\cos\theta=$

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C.0　　D.1

4.窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸，是中国古老的传统民间艺术.图1是一张由卷曲纹和回纹构成的正六边形剪纸窗花，如图2所示其外框是边长为2的正六边形$ABCDEF$，内部圆的圆心为该正六边形的中心O，圆O的半径为1，点P在圆O上运动，则$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{OE}$的最小值为


图1

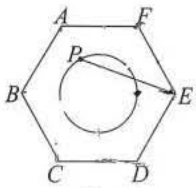


图2

A.-1　　B.-2　　C.1　　D.2

5.在二项式$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6$的展开式中，把所有的项进行排列，有理项都互不相邻，则不同的排列方案为

A. $A_5^5A_6^2$种　　B. $A_4^4A_5^3$种　　C. $A_5^5A_7^2$种　　D. $A_4^4A_2^2$种

6.若函数 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=f\left(-x\right)$ 在区间 $\left[m,n\right]$ 上的单调性相同，则把区间 $\left[m,n\right]$ 叫做 $y=f\left(x\right)$ 的“稳定区间”.

已知区间 $\left[1,2023\right]$ 为函数 $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+a\right|$ 的“稳定区间”，则实数 a 的可能取值是

A. $-\frac{9}{4}$　　B. $-\frac{5}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

7.已知正项数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=\frac{\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}}{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}$，其前 200 项和为 S_{200}，则

A. $\frac{7}{6}<S_{200}<\frac{6}{5}$　　B. $\frac{6}{5}<S_{200}<\frac{5}{4}$

C. $\frac{5}{4}<S_{200}<\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{3}<S_{200}<\frac{3}{2}$

8.已知函数 $f\left(x\right)=a\ln\left(x+a\right)-\frac{a}{e\left(x+a\right)}+bx+a\left(b+4\right)\left(a>0\right)$，对于定义域内的任意 x 恒有 $f\left(x\right)\le 0$，

则 $\frac{b}{a}$ 的最大值为

A. $-2e$　　B. $-e$　　C. e^{-}　　D. e

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9.已知 $a,b,c\in R$，下列命题为真命题的是

A.若 $b<a<0$，则 $b\cdot c^2<a\cdot c^2$　　B.若 $b>a>0>c$，则 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$

C.若 $c>b>a>0$，则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$　　D.若 $a>b>c>0$，则 $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$

10.已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长均为 $\sqrt{2}$，M，N 分别为棱 AD，BC 的中点，F 为棱 AB 上异于 A，B 的动点，点 G 为线段 MN 上的动点，则

A.线段 MN 的长度为 1　　B. $\triangle FMN$ 周长的最小值为 $\sqrt{2}+1$

C. $\angle MFN$ 的余弦值的取值范围为 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$　　D.直线 FG 与直线 CD 互为异面直线

11.已知抛物线 C： $y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，直线 l 与 C 交于 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$ 两点，其中点 A 在第一象限，点 M 是 AB 的中点，MN 垂直准线于 N，则下列结论正确的是

A.若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$

B.点 M 到准线距离为 $\frac{\left|AB\right|}{2}$

C.若直线l经过焦点F且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-12$，则$p=4$

D.若以AB为直径的圆M经过焦点F，则$\dfrac{|AB|}{|MN|}$的最小值为$\sqrt{2}$

12.若$f(x)=2\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|+2\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\right|$，$x\in\left[0,\dfrac{25\pi}{12}\right]$时，函数$g(x)=2f(x)+b$（$b$是实常数）有奇数个零点，记为$x_1,x_2,\cdots,x_{2n},x_{2n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$a_1,a_2\in\left[-\dfrac{5\pi}{12},0\right]$且$a_1\neq a_2$，则

A. $f(x)$的最小正周期是π

B. $f(x)$的对称轴方程为$x=\dfrac{k\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12}(k\in\mathrm{Z})$

C. $x_{2n+1}+x_{2n-2}=x_{2n-1}+x_{2n}\ (n\geq 2)$

D.对任意的$x\in\mathrm{R}$，$\exists a_1,a_2$使得$\left[f(x)\right]^2-2f(x)f(a_k)+1=0\ (k=1,2)$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.已知等比数列$\{a_n\}$，其前n项和为S_n，若$a_2=8$，$S_3=28$，则$a_3=$_______.

14.现有四家工厂生产同一产品，已知它们生产该产品的日产量分别占日产量总和的15%，20%，30%和35%，且产品的不合格率分别为0.05，0.04，0.03和0.02.现从四家工厂一天生产的所有产品中任取一件，则抽到不合格品的概率是_______.

15.已知双曲线Ω：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，圆$O$：$x^2+y^2=a^2+b^2$与$x$轴交于$A$、$B$两点，$M$、$N$是圆$O$与双曲线在$x$轴上方的两个交点，点$A$、$M$在$y$轴的同侧，且$AM$交$BN$于点$C$.若$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{ON}$，则双曲线的离心率为________.

16.在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，动点P在平面ACD_1上运动，且$B_1P=\dfrac{4}{3}$，三棱锥B_1-ACD外接球球面上任意一点Q到点P到的距离记为PQ，当平面PAD与平面ADB_1，夹角的正切值为$\sqrt{6}$时，则PQ的最大值为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分10分）记正项数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，且$\dfrac{1}{a_n}=1-\dfrac{4}{T_n}$.

（1）证明：数列$\{T_n\}$是等差数列；

（2）记$b_n=(-1)^n\cdot\dfrac{8n+6}{T_n\cdot T_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$S_{2n}$.

18.（本题满分 12 分）在$\triangle ABC$中，A，B，C的对边分别为a，b，c且$c\cdot\cos A+\sqrt{3}c\cdot\sin A=a+b$.

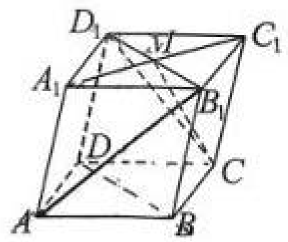
（1）求C的值;

（2）若AB边上的点M满足$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$c=3$，$CM=\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的周长.

19.（本题满分 12 分）已知底面为菱形的平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BD=1$，四边形BDD_1B为正方形，A_1C_1交B_1D_1于点M.

（1）证明：$BD\perp CM$；

（2）若$AB_1=\sqrt{3}$，求直线CD_1与平面BDD_1B_1所成角的余弦值.



20.（本题满分 12 分）为了精准地找到目标人群，更好地销售新能源汽车，某4S 店对近期购车的男性与女性各100 位进行问卷调查，并作为样本进行统计分析，得到如下列联表$(m\le 40, m\in N)$：

	购买新能源汽车（人数）	购买传统燃油车（人数）
男性	$80-m$	$20+m$
女性	$60+m$	$40-m$

（1）当$m=0$时，将样本中购买传统燃油车的购车者按性别采用分层抽样的方法抽取 6 人，再从这 6 人中随机抽取 3 人调查购买传统燃油车的原因，记这 3 人中女性的人数为X，求X的分布列与数学期望;

（2）定义$K^2=\sum\dfrac{\left(A_{ij}-B_{ij}\right)^2}{B_{ij}}(2\le i\le 3, 2\le j\le 3, i, j\in N)$，其中$A_{ij}$为列联表中第 i 行第 j 列的实际数据，$B_{ij}$为列联表中第 i 行与第 j 列的总频率之积再乘以列联表的总频数得到的理论频数.基于小概率值α的检验规则：首先提出零假设H_0（变量X，Y相互独立），然后计算K^2的值，当$K^2\ge x_\alpha$时，我们推断H_0不成立，即认为X和Y不独立，该推断犯错误的概率不超过α；否则，我们没有充分证据推断H_0不成立，可以认为X和Y独立.根据K^2的计算公式，求解下面问题:

（i）当$m=0$时，依据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，请分析性别与是否喜爱购买新能源汽车有关;

（ii）当$m<10$时，依据小概率值$\alpha=0.1$的独立性检验，若认为性别与是否喜爱购买新能源汽车有关，则至

少有多少名男性喜爱购买新能源汽车？

附：

α	0.1	0.025	0.005
x_α	2.706	5.024	7.879

21.（本题满分 12 分）已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，其右焦点为$F$，过点$F$的直线与椭圆$C$交于$A$，$B$两点，与$y$轴交于点$P$，$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{PB}=\mu\overrightarrow{BF}$.

（1）求证：$\lambda+\mu$为定值.

（2）若点P不在椭圆C的内部，点Q是点P关于原点O的对称点，试求$\triangle QAB$面积的最小值.

22.（本题满分 12 分）已知函数$f\left(x\right)=xe^{-x}\cdot\ln a$，$g\left(x\right)=\sin x$.

（1）若$x=0$是函数$h\left(x\right)=f\left(x\right)+ag\left(x\right)$的极小值点，讨论$h\left(x\right)$在区间$\left(-\infty,\pi\right)$上的零点个数.

（2）英国数学家泰勒发现了如下公式：

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{\left(2n\right)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{\left(2n\right)!}+\cdots\left(n\in N^*\right)$$

这个公式被编入计算工具，计算足够多的项时就可以确保显示值的精确性.

现已知$\dfrac{g\left(x\right)}{x}=\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right)\left(1+\dfrac{x}{\pi}\right)\left(1-\dfrac{x}{2\pi}\right)\left(1+\dfrac{x}{2\pi}\right)\left(1-\dfrac{x}{3\pi}\right)\left(1+\dfrac{x}{3\pi}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x}{n\pi}\right)\left(1+\dfrac{x}{n\pi}\right)\cdots$，

利用上述知识，试求$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的值.