秘密★启封并使用完毕前【考试时间：2023年9月19日下午15：00-17：00】

南充市高2024届高考适应性考试（零诊）

文科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 i 是虚数单位，则复数 $\frac{2-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 的模为（　　）

A. 5　　B. $\sqrt{13}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】运用复数乘法、除法运算及复数的模的公式计算即可.

【详解】因为 $\frac{2-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(2-3\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-3-2\mathrm{i}$，所以 $\left|\frac{2-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

故选：B.

2. 已知集合 $A=\left\{x\middle|(x-3)(x-7)\le 0\right\},B=\left\{x\middle|\frac{x-1}{x-4}<0\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|1<x\le 7\}$　　B. $\{x|1<x<4\}$

C. $\{x|3\le x<4\}$　　D. $\{x|3\le x\le 7\}$

【答案】C

【解析】

【分析】首先解二次不等式和分式不等式得到 $A=\{x\,|\,3\le x\le 7\}$，$B=\{x\,|\,1<x<4\}$，再求交集即可.

【详解】$A=\left\{x\middle|(x-3)(x-7)\le 0\right\}=\{x\,|\,3\le x\le 7\}$，

$B=\left\{x\middle|\frac{x-1}{x-4}<0\right\}=\{x\,|\,1<x<4\}$，

则 $A\cap B=\{x|3\le x<4\}$.

故选：C

3. 已知 $a=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}},b=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}},c=\log_{\frac{2}{5}}2$，则（　　）

A. $a<b<c$　　　　B. $b<a<c$　　　　C. $c<b<a$　　　　D. $c<a<b$

【答案】D

【解析】

【分析】由 $y=x^{\frac{2}{5}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增比较 a,b，再由 $y=\log_{\frac{2}{5}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，得到 $c<0$ 比较即可.

【详解】因为 $y=x^{\frac{2}{5}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$，

所以 $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}<\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，即 $0<a<b$，

又 $y=\log_{\frac{2}{5}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，

所以 $c=\log_{\frac{2}{5}}2<\log_{\frac{2}{5}}1=0$，

所以 $c<a<b$.

故选：D

4. 已知幂函数 $f(x)=x^{\frac{m}{n}}(m,n\in Z)$，下列能成为"$f(x)$ 是 **R** 上的偶函数"的充分条件的是（　　）

A. $m=-3,n=1$　　　　B. $m=1,n=2$

C. $m=2,n=3$　　　　D. $m=1,n=3$

【答案】C

【解析】

【分析】根据幂函数的性质，结合充分条件的定义进行判断即可.

【详解】当 $m=-3,n=1$ 时，$f(x)=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$，

因为函数 $f(x)=\frac{1}{x^3}$ 的定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，且

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}=-f(x)$，

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ 为奇函数，不合题意，故 A 错误；

当 $m=1,n=2$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，因为 $f(x)=\sqrt{x}$ 函数的定义域 $[0,+\infty)$，不关于原点对称，

所以 $f(x)=\sqrt{x}$ 为非奇非偶函数，不合题意，故 B 错误；

当 $m=2,n=3$ 时，$f(x)=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt[3]{x^2}$，定义域为 R，关于原点对称，且

$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}=f(x)$，

所以 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 为偶函数，符合题意，故 C 正确；

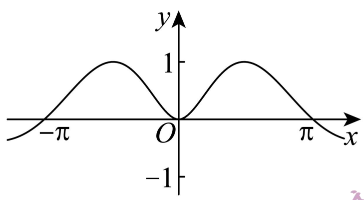
当 $m=1,n=3$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，定义域为 R，关于原点对称，且

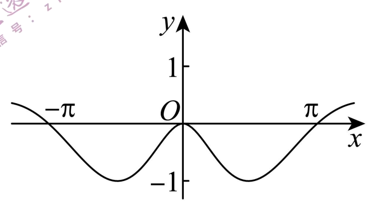
$f(-x)=(-x)^{\frac{1}{3}}=-x^{\frac{1}{3}}=-f(x)$，

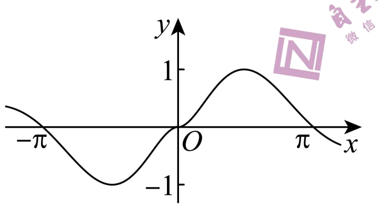
所以 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 为奇函数，不合题意，故 D 错误.

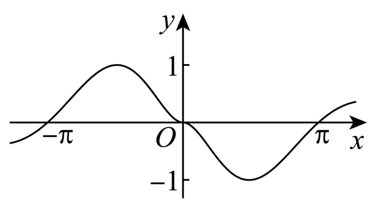
故选：C.

5. 函数 $f(x)=\dfrac{x\sin x}{\mathrm{e}^{|x|-1}}$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据偶函数排除 C、D，再计算 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，可排除 B，从而可得到答案.

【详解】$f(x)$ 的定义域为 R，

因为 $f(-x)=\dfrac{-x\sin(-x)}{\mathrm{e}^{|-x|-1}}=\dfrac{x\sin x}{\mathrm{e}^{|x|-1}}=f(x)$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 R 上为偶函数，可排除 C、D；

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{e^{\left|\frac{\pi}{2}\right|-1}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\left|\frac{\pi}{2}\right|-1}}>0$，可排除 B.

故选：A.

6. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，把函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象对应函数解析式为（　　）

A. $y=2\sin 2x$　　B. $y=2\cos 2x$

C. $y=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　　D. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】先根据正弦函数最小正周期公式求出 $\omega=2$，在根据左加右减求出平移后的解析式.

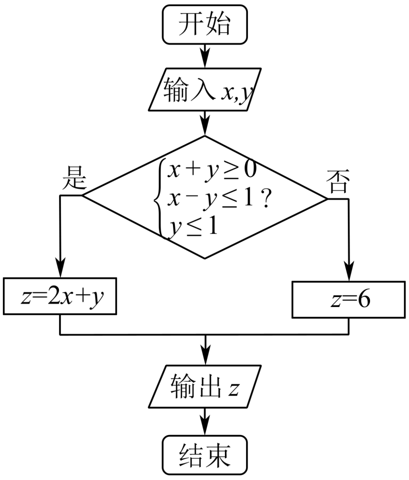
【详解】因为 $\omega>0$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，故 $\omega=2$，

则 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

则向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 2x$.

故选：A

7. 执行如图所示的程序框图，若输入的 $x,y\in\mathbf{R}$，则（　　）



A. 输出的 z 的最小值为$\frac{1}{2}$，最大值为 5

B. 输出的 z 的最小值为$\frac{1}{2}$，最大值为 6

C. 输出的 z 的最小值为-1，最大值为 5

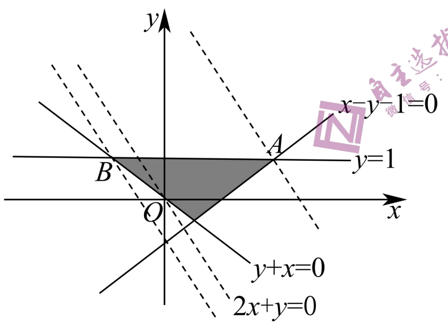
D. 输出的 z 的最小值为-1，最大值为 6

【答案】D

【解析】

【分析】作出可行域，利用线性规划与程序框图判定即可.

【详解】作出不等式组$\begin{cases}x+y\geq 0\\x-y\leq 1\\y\leq 1\end{cases}$表示的可行域，如图，



联立$\begin{cases}x+y=0\\y=1\end{cases}$可得 $B(-1,1)$，联立$\begin{cases}x-y-1=0\\y=1\end{cases}$可得 $A(2,1)$，

由图可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $A(2,1)$ 时，z 取得最大值 5，

当直线 $z=2x+y$ 过点 $B(-1,1)$ 时，z 取得最小值 -1，

因为 $5<6$，且 $x,y\in\mathbf{R}$，

所以输出 z 的最小值为 -1，最大值为 6.

故选：D

8. 同时抛掷两颗质地均匀的骰子，则两颗骰子出现的点数之和为 4 的概率为（　　）

A. $\frac{1}{21}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{11}$　　D. $\frac{2}{21}$

【答案】B

【解析】

【分析】求出抛掷两颗骰子的试验的基本事件总数，再列举出所求概率的事件，利用古典概率公式求解作答.

【详解】依题意，同时抛掷两颗质地均匀的骰子的试验，基本事件有：

$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$，

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$，

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$，共 36 种，

两颗骰子出现的点数之和为 4 的事件包含的基本事件有：$(1,3),(2,2),(3,1)$，共 3 个，

所以两颗骰子出现的点数之和为 4 的概率是 $P=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

故选：B

9. 已知平面向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|\neq 0, \vec{a}\perp(\vec{a}-3\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的正切值为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量垂直可得数量积为 0，代入模长即可化简求解余弦，进而可得正切.

【详解】由 $\vec{a}\perp(\vec{a}-3\vec{b})$ 可得 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=\vec{a}^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

又 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|\neq 0,$ 所以 $|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=4|\vec{b}|^2-6|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$，

因此 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{2}{3}>0$，由所以 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\sin\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$， 故 $\tan\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

故选：B

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=10, a_2+a_3+a_4+a_5=20$，则 S_n 的最大值为（　　）

A. 60　　B. 50　　C. $\frac{121}{4}$　　D. 30

【答案】D

【解析】

【分析】根据等差数列的性质，结合求和公式即可求解.

【详解】由 $a_1=10$ 和 $a_2+a_3+a_4+a_5=20\Rightarrow a_1+a_6=10\Rightarrow a_6=0$，

由于 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=10>0, a_6=0$， 所以当 $n\le 5, n\in\mathrm{N}$ 时， $a_n>0$，

故 S_n 的最大值为 $S_5=S_6=\frac{(a_1+a_6)\times 6}{2}=\frac{10\times 6}{2}=30$，

故选：D

11. 定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)$ 是偶函数，当 $x\in(0,1]$ 时， $f(x)=2\sin\frac{\pi}{2}x$，则 $f(2024)=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，由函数奇偶性的性质分析可得 $f(x+2)=-f(x)$， 进而可得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，从而利用周期性即可求解.

【详解】根据题意，函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$， 且 $f(0)=0$，

又函数 $f(x+1)$ 是偶函数，则 $f(-x+1)=f(x+1)$， 变形可得 $f(-x)=f(x+2)$，

则有 $f(x+2)=-f(x)$， 进而可得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

则 $f(2024)=f(506\times 4+0)=f(0)=0$.

故选：C.

12. 形如 $f\left(x\right)=ax+\frac{b}{x}(a,b>0)$ 的函数是中学数学常见的函数模型之一，因其图象上半部分像极了老师批阅作业所用的“√”，所以也称为“对勾函数”．研究证明，对勾函数可以看作是焦点在坐标轴上的双曲线绕原点旋转得到，即对勾函数的图象是双曲线，直线 $y=ax$ 是它的一条渐近线．点 P 是双曲线 $f\left(x\right)=\sqrt{3}x+\frac{1}{x}$ 上任意一点，在点 P 处作双曲线的切线，交渐近线于 A、B 两点，已知 O 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 的面积为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据导数的几何意义求切线方程，进而可求结果．

【详解】因为 $f'\left(x\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{x^2}$，

设 $P(t,\sqrt{3}t+\frac{1}{t})$，则 P 处切线的斜率 $k=f'(t)=\sqrt{3}-\frac{1}{t^2}$，

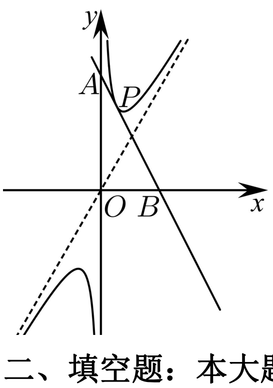
所以切线方程为 $y=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{t^2}\right)(x-t)+\sqrt{3}t+\frac{1}{t}$，

令 $x=0$，可得 $y=(\sqrt{3}-\frac{1}{t^2})(-t)+\sqrt{3}t+\frac{1}{t}=\frac{2}{t}$，即 $A(0,\frac{2}{t})$，则 $|OA|=\frac{2}{|t|}$；

令 $y=\sqrt{3}x=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{t^2}\right)\left(x-t\right)+\sqrt{3}t+\frac{1}{t}$，可得 $x=2t$，即 $B(2t,2t)$，则 $|OB|=2\sqrt{2}\,|t|$；

故 $\triangle OAB$ 面积为 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{|t|}\times2|t|=2$．

故选：D



二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13. 若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+2x-m=0$ 成立”为真命题，则实数 m 的取值范围是_________．

【答案】$[-1,+\infty)$

【解析】

【分析】根据题意得到$\Delta=4+4m\geq 0$，再解不等式即可.

【详解】因为命题"$\exists x\in \mathbf{R}$，使得$x^2+2x-m=0$成立"为真命题，

所以$\Delta=4+4m\geq 0$，解得$m\geq -1$.

故答案为：$[-1,+\infty)$

14. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_5=2,a_{13}=32$，则$a_9=$________.

【答案】8

【解析】

【分析】根据题意得到$q^4=4$，再根据$a_9=a_5q^4$求解即可.

【详解】因为等比数列$\{a_n\}$中，$a_5=2,a_{13}=32$，

所以$q^8=\dfrac{a_{13}}{a_5}=\dfrac{32}{2}=16$.

又因为$q^4>0$，所以$q^4=4$，所以$a_9=a_5q^4=2\times 4=8$.

故答案为：8

15. 已知圆$C:x^2+y^2-2x-4y+1=0$上恰有3点到直线$x-y+m=0$的距离等于1，则$m=$________.

【答案】$1\pm\sqrt{2}$

【解析】

【分析】求出圆的圆心和半径，再求出圆心到直线距离为1的m值作答.

【详解】圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$的圆心$C(1,2)$，半径$r=2$，

由圆C上恰有3点到直线$x-y+m=0$的距离等于1，得圆心C到直线$x-y+m=0$的距离等于1，

于是$\dfrac{|1-2+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$，解得$m=1\pm\sqrt{2}$，

所以$m=1\pm\sqrt{2}$.

故答案为：$1\pm\sqrt{2}$

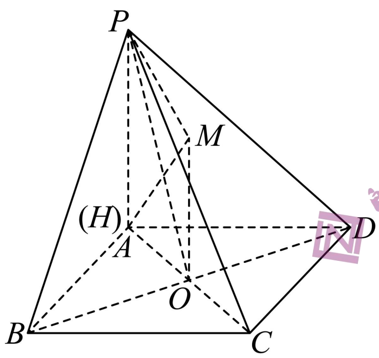
16. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 2 的正方形，$PB=PD=\sqrt{6}$，三棱锥 $P-BCD$ 的体积为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为________.

【答案】10π

【解析】

【分析】根据三棱锥体积公式得到点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{2}$，进而得到 $PA\perp OA$，结合图形特征求出外接球半径，再根据球的表面积公式计算即可得到答案.

【详解】如下图所示，连接 AC,BD，设 $AC\cap BD=O$，连接 PO，



因为 $PB=PD=\sqrt{6}$，所以 $PO\perp BD$，

所以 $OP=\sqrt{PB^2-OB^2}=\sqrt{6-2}=2$，

设点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 h，

因为四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 2 的正方形，

则 $\triangle BCD$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$，

所以三棱锥 $P-BCD$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $h=\sqrt{2}$，

记 PH 是三棱锥 $P-BCD$ 的高，则 $PH=h=\sqrt{2}$，

在直角 $\triangle PHO$ 中，$\sin\angle POH=\dfrac{PH}{OP}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

显然 $\angle POH$ 为锐角，则 $\cos\angle POH=\sqrt{1-\sin^2\angle POH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

在$\triangle PAO$中，由余弦定理得，$PA^2=OA^2+OP^2-2OA\cdot OP\cos\angle AOP$

$=2+4-2\times\sqrt{2}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$，

即$PA=\sqrt{2}$，则$PA^2+OA^2=OP^2$，则$PA\perp OA$，

因为$BD\perp AC$，$BD\perp OP$，$AC,OP\subset$平面ACP，$AC\bigcap OP=O$，

所以$BD\perp$平面ACP，

又因为$PA\subset$平面ACP，所以$BD\perp PA$，

因为$OA,BD\subset$平面$ABCD$，$OA\cap BD=O$，

所以$PA\perp$平面$ABCD$，

记M为四棱锥$P-ABCD$的外接球球心，连接OM，则$OM\perp$平面$ABCD$，

则$r=MA=\sqrt{\left(\frac{1}{2}PA\right)^2+OA^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{2}^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

所以四棱锥$P-ABCD$的外接球的表面积为$4\pi r^2=10\pi$.

故答案为：10π

【点睛】方法点睛：本题考查立体几何的综合问题，此类问题常见的处理方法为：

（1）几何法：通过图形特征转化，结合适当的辅助线进而求解；

（2）坐标法：通过建立恰当的空间直角坐标系，结合空间坐标运算公式求解；

（3）基底法：通过向量的基底转化以及向量的运算法则进行求解.

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第1721题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分

17. 已知向量$\overrightarrow{m}=\left(\cos^2x,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{n}=\left(2,\sin 2x\right)$，函数$f\left(x\right)=\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}$.

（1）求函数$f(x)$的单调递增区间；

（2）在$\triangle ABC$中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，且$f\left(C\right)=3,c=1$，$ab=2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

【答案】（1）$[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi](k\in Z)$；

（2）$3+\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】（1）利用向量数量积的坐标表示，二倍角公式、辅助角公式求出并化简 $f(x)$，再利用正弦函数单调性求解作答.

（2）由（1）求出 C，再利用余弦定理求解作答.

【小问 1 详解】

依题意，$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 得：$-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi](k\in Z)$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$f(C)=2\sin(2C+\frac{\pi}{6})+1=3$，即 $\sin(2C+\frac{\pi}{6})=1$，而 $C\in(0,\pi)$，

则 $2C+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6})$，于是 $2C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得 $C=\frac{\pi}{6}$，

由余弦定理有 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即

$1=(a+b)^2-(2+\sqrt{3})ab=(a+b)^2-2\sqrt{3}\times(2+\sqrt{3})$，

解得 $a+b=2+\sqrt{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$.

18. 第三十一届世界大学生夏季运动会于 2023 年 8 月 8 日晚在四川省成都市胜利闭幕．来自 113 个国家和地区的 6500 名运动员在此届运动会上展现了青春力量，绽放青春光彩，以饱满的热情和优异的状态谱写了青春、团结、友谊的新篇章．外国运动员在返家时纷纷购买纪念品，尤其对中国的唐装颇感兴趣．现随机对 200 名外国运动员（其中男性 120 名，女性 80 名）就是否有兴趣购买唐装进行了解，统计结果如下：

	有兴趣	无兴趣	合计
男性运动员	80	40	120
女性运动员	40	40	80
合计	120	80	200

（1）是否有 99%的把握认为“外国运动员对唐装感兴趣与性别有关”；

（2）按分层抽样的方法抽取 6 名对唐装有兴趣的运动员，再从中任意抽取 2 名运动员作进一步采访，求抽取的两名运动员恰好是一名男性和一名女性的概率．

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

临界值表：

$P(K^2>k_0)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

【答案】（1）没有 99% 的把握认为“外国运动员对唐装感兴趣与性别有关”

（2）$\dfrac{8}{15}$

【解析】

【分析】（1）根据卡方直接计算并判断即可；

（2）根据古典概型的概率求解方法进行计算即可．

【小问 1 详解】

提出假设 H_0：外国运动员对唐装感兴趣与性别无关，

由已知 $K^2=\dfrac{200\times(80\times40-40\times40)^2}{120\times80\times80\times120}=\dfrac{50}{9}\approx5.556<6.635$

故没有 99% 的把握认为“外国运动员对唐装感兴趣与性别有关”

【小问 2 详解】

按分层抽样的方法抽取 6 名对唐装有兴趣的运动员，

则其中男性运动员 4 名，记为 A、B、C、D，女性运动员 2 名，记为 E、F，

从 6 人中随机抽取两人，有 $\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,E\},\{A,F\},\{B,C\},\{B,D\}$，

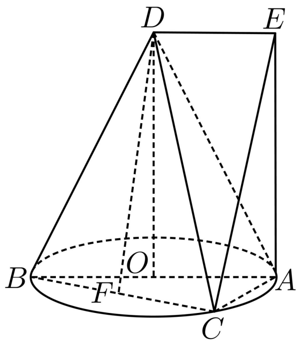
$\{B,E\},\{B,F\},\{C,D\},\{C,E\},\{C,F\},\{D,E\},\{D,F\},\{E,F\}$ 共 15 个基本事件，

其中满足抽取的两名运动员恰好是一名男性和一名女性的有

$\{A,E\},\{A,F\},\{B,E\},\{B,F\}$，$\{C,E\},\{C,F\},\{D,E\},\{D,F\}$，共 8 个基本事件，

抽取的两名运动员恰好是一名男性和一名女性的概率为 $P=\frac{8}{15}$

19. 如图所示，在圆锥 DO 中，D 为圆锥的顶点，O 为底面圆圆心，AB 是圆 O 的直径，C 为底面圆周上一点，四边形 $AODE$ 是矩形.



（1）若点 F 是 BC 的中点，求证：$DF//$ 平面 ACE；

（2）若 $AB=2,\angle BAC=\angle ACE=\frac{\pi}{3}$，求三棱锥 $A-CDE$ 的体积.

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】（1）根据给定条件，利用线面平行的判定、面面平行的判定性质推理作答.

（2）证明 $AE\perp$ 平面 ABC，再利用等体积法求解作答.

【小问 1 详解】

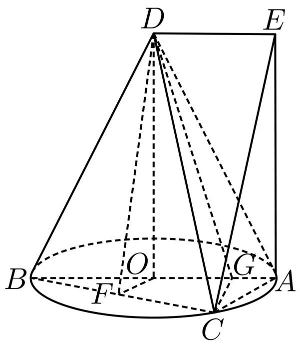
依题意，连接 OF，O、F 分别是 AB、BC 中点，则 $OF//AC$，

$OF\not\subset$ 平面 $ACE,AC\subset$ 平面 ACE，则 $OF//$ 平面 ACE，

四边形 $AODE$ 是矩形，$OD//AE$，同理有 $OD//$ 平面 ACE，

又 $OF\cap OD=O,OF,OD\subset$ 平面 ODF，于是平面 $ODF//$ 平面 ACE，又 $DF\subset$ 平面 ODF，

所以 $DF//$ 平面 ACE.



【小问 2 详解】

在圆锥 DO 中，$DO \perp$ 平面 ABC，$DO \subset$ 平面 $ABDE$，则平面 $ABDE \perp$ 平面 ABC，

平面 $ABDE \cap$ 平面 $ABC = AB$，在平面 ABC 内过点 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G，

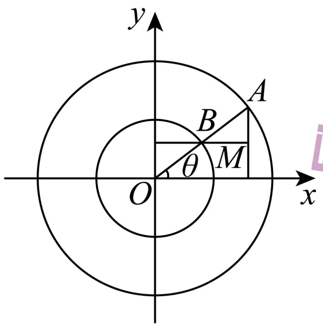
则 $CG \perp$ 平面 $ABDE$，在 $\mathrm{Rt}ABC$ 中，$AB = 2, \angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$，则 $AC = 1, BC = \sqrt{3}, CG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

显然 $AE \perp$ 平面 ABC，$AC \subset$ 平面 ABC，则 $AE \perp AC$，又 $AC = 1$，$\angle ACE = \dfrac{\pi}{3}$，因此

$AE = \sqrt{3}$，

$V_{A-CDE} = V_{C-ADE} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ADE} \cdot CG = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{4}$.

20. 如图所示，以原点 O 为圆心，分别以 2 和 1 为半径作两个同心圆，设 A 为大圆上任意一点，连接 OA 交小圆于点 B，设 $\angle AOx = \theta$，过点 A, B 分别作 x 轴，y 轴的垂线，两垂线交于点 M .



（1）求动点 M 的轨迹 C 的方程;

（2）点 E、F 分别是轨迹 C 上两点，且 $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} = 0$，求 $\triangle EOF$ 面积的取值范围.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

（2）$S_{\triangle EOF} \in \left[\dfrac{4}{5}, 1\right]$

【解析】

【分析】（1）根据 $\angle AOx=\theta(0\le\theta<2\pi)$ 得到 A 点坐标，设出 M 点坐标，根据参数方程即可得到曲线 C 的方程；

（2）根据 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=0$ 得到 $OE\perp OF$，根据 OE 与 OF 的位置关系进行分类，再联立化简韦达定理得到 $|OE|$ 与 $|OF|$ 的长，根据三角形的面积公式得到结果即可.

【小问 1 详解】

因为 $\angle AOx=\theta(0\le\theta<2\pi)$，所以 $A\left(2\cos\theta,2\sin\theta\right),B\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，

设 $M\left(x,y\right)$，则 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 是参数），消去 θ 得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

即曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

$\therefore\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=0$，

$\therefore OE\perp OF$，

当直线 OE 或 OF 的斜率不存在时，易得 $S_{\triangle EOF}=1$

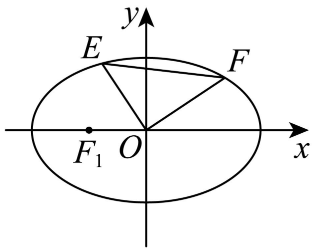
当直线 OE 和 OF 的斜率都存在时，设 $l_{OE}:y=kx\left(k\ne0\right),E\left(x_1,y_1\right)$，

则 $l_{OF}:y=-\frac{x}{k}$

由 $\begin{cases}y=kx\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1^2=\dfrac{4}{1+4k^2}\\ y_1^2=\dfrac{4k^2}{1+4k^2}\end{cases}$，

$\therefore|OE|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{\frac{4\left(1+k^2\right)}{4k^2+1}}$，

同理可得 $|OF|=\sqrt{\frac{4\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{4}{k^2}+1}}=\sqrt{\frac{4\left(k^2+1\right)}{k^2+4}}$



$$S_{\triangle EOF}=\frac{1}{2}|OE|\cdot|OF|=2\sqrt{\frac{\left(k^2+1\right)^2}{\left(k^2+4\right)\left(4k^2+1\right)}}$$，令 $t=k^2+1>1$

$$S_{\triangle EOF}=2\sqrt{\frac{t^2}{4t^2+9t-9}}=2\sqrt{\frac{1}{-\frac{9}{t^2}+\frac{9}{t}+4}}=2\sqrt{\frac{1}{-9\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}}}\in\left[\frac{4}{5},1\right)$$

故 $S_{\triangle EOF}\in\left[\frac{4}{5},1\right]$.

【点睛】压轴题点睛：该题关键在于分类 OE 与 OF 的位置关系，通过联立化解以及三角形的面积公式得到结果，注意化简中的技巧运用.

21. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax+\frac{1-a}{x}-1\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）当 $a\geq1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时，恒有 $f\left(x+1\right)+\frac{a-1}{x+1}+a+1\leq0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1） $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 $\left(0,1\right)$，单调递减区间是 $\left(1,+\infty\right)$

（2） $a\in\left[1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）求导得到 $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-a-\frac{1-a}{x^2}=-\frac{\left(x-1\right)\left[ax+\left(a-1\right)\right]}{x^2}(x>0)$，根据 $a\geq1$，

由 $f¢\left(x\right)>0$， $f'\left(x\right)<0$ 求解；

（2）将 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时，恒有 $f\left(x+1\right)+\frac{a-1}{x+1}+a+1\leq0$ 成立，转化为 $\ln\left(x+1\right)-ax\leq0$ 对

任意 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，令 $h(x)=\ln(x+1)-ax$ ，利用导数法求解.

【小问 1 详解】

解：$f'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{1-a}{x^2}=-\frac{(x-1)[ax+(a-1)]}{x^2}(x>0)$，

当 $a\ge 1$ 时，$ax+a-1>0$，

由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，由 $f'(x)<0$，得 $x>1$，

故 $a\ge 1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$，单调递减区间是 $(1,+\infty)$；

【小问 2 详解】

因为当 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有 $f(x+1)+\frac{a-1}{x+1}+a+1\le 0$ 成立，

即 $\ln(x+1)-ax\le 0$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，

令 $h(x)=\ln(x+1)-ax,x\ge 0,h'(x)=\frac{1}{x+1}-a$，

当 $a\ge 1$ 时，$x\ge 0\Rightarrow 0<\frac{1}{x+1}\le 1,h'(x)\le 0,h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

$h(x)\le h(0)=0$，满足题意，

当 $0<a<1$ 时，$h(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{a}-1\right)$ 上单调递增，当 $x\in\left[0,\frac{1}{a}-1\right)$ 时，$h(x)\ge h(0)=0$，

当 $a\le 0$ 时，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)\ge h(0)=0$，

故 $a\in[1,+\infty)$.

【点睛】方法点睛：对于 $f(x)-a<0,x\in D$ 恒成立问题，法一：令 $g(x)=f(x)-a$，由 $g(x)_{\max}<0$ 求解；法二转化为 $f(x)<a,x\in D$ 恒成立，由 $f(x)_{\max}<a$ 求解.

（二）选考题：共 10 分．考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4t^2\\y=4t\end{cases}$（$t$ 为参数），以原点为极点，x 轴

正半轴为极轴建立极坐标系，直线l的极坐标方程为$\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

（1）求曲线C_1的普通方程和直线l的直角坐标方程；

（2）已知点P的直角坐标为$(0,-1)$，曲线C_1与直线l交于M，N两点，求$\left|\frac{1}{|PM|}-\frac{1}{|PN|}\right|$的值.

【答案】（1）$y^2=4x$，$x-y-1=0$

（2）4

【解析】

【分析】（1）根据曲线的参数方程与直线的极坐标方程转化为普通方程即可；

（2）根据题意写出直线l的参数方程，再将其代入曲线C_1的普通方程中，化简后，利用参数的几何意义即可求解.

【小问 1 详解】

由$y=4t$，得$t=\frac{y}{4}$，代入$x=4t^2$，得$x=\frac{y^2}{4}$，

所以曲线C_1的普通方程为$y^2=4x$，

由$\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1$，

得$\sqrt{2}\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=-1$，即$\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=-1$，

所以直线l的直角坐标方程为$x-y-1=0$.

【小问 2 详解】

由点$P(0,-1)$在直线l上，

则设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），

代入$y^2=4x$中，得$t^2-6\sqrt{2}t+2=0$，

设点M，N对应的参数分别为t_1，t_2，则$t_1+t_2=6\sqrt{2}$，$t_1t_2=2$，

所以$\left|\dfrac{1}{|PM|}-\dfrac{1}{|PN|}\right|=\left|\dfrac{1}{|t_1|}-\dfrac{1}{|t_2|}\right|=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=4$.

23. 已知函数$f(x)=|x+m|+2|x-1|$.

（1）若$m=-5$，求不等式$f(x)\le 8$的解集；

（2）若$\{x\,|\,f(x)<3\}\supseteq[0,1]$，求实数$m$的取值范围.

【答案】（1）$\left[-\dfrac{1}{3},5\right]$

（2）$m\in(-1,1)$

【解析】

【分析】（1）由题意$f(x)\le 8\Leftrightarrow|x-5|+2|x-1|\le 8$，去绝对值分类讨论即可.

（2）由题意$\{x\,|\,f(x)<3\}\supseteq[0,1]$转换为$\forall x\in[0,1],f(x)<3$恒成立即可.

【小问1详解】

当$m=-5$时，$f(x)\le 8\Leftrightarrow|x-5|+2|x-1|\le 8$

即$\begin{cases}x\le 1\\5-x+2-2x\le 8\end{cases}$或$\begin{cases}1<x\le 5\\5-x-2+2x\le 8\end{cases}$或$\begin{cases}x>5\\-5+x-2+2x\le 8\end{cases}$，

解得$-\dfrac{1}{3}\le x\le 5$，原不等式的解集为$\left[-\dfrac{1}{3},5\right]$.

【小问2详解】

$f(x)<3$的解集包含$[0,1]$，即$\forall x\in[0,1],f(x)<3$恒成立，

即$|x+m|+2-2x<3\Leftrightarrow -3x-1<m<x+1$，

所以$(-3x-1)_{\max}<m<(x+1)_{\min}$，

所以$m\in(-1,1)$.