湖南师大附中2024届高三月考试卷(二)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	D	C	B	B	C	AB	AC	BCD	ACD

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. A 【解析】由题意 $A=\{x|x+1>0\}=\{x|x>-1\}=(-1,+\infty)$, $B=\{y|y<0\}=(-\infty,0)$,
$\therefore A\cap B=(-1,0)$. 故选 A.

2. D 【解析】只有当 a,b 同号时才有 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow a>b$,故 A 错,$a^3>b^3\Leftrightarrow a>b$,故 B 错,$a^2>b^2$ 推不出 $a>b$,C 显然错误,$ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$,而反之不成立. 故选 D.

3. B 【解析】设圆锥底面半径为 r,母线长为 l,则 $\begin{cases}\pi\times r\times l=2\pi,\\ 2\times\pi\times r=\frac{1}{2}\times 2\times\pi\times l,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}l=2\\ r=1\end{cases}$. 故选 B.

4. D 【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等差数列,$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6=\frac{22}{3}\pi$,所以 $a_6=\frac{2}{3}\pi$,又因为 $\{b_n\}$ 为等比数列,$b_5\cdot b_7=b_6^2=\frac{\pi^2}{4}$,所以 $b_6=\pm\frac{1}{2}\pi$,所以 $\tan(a_6+b_6)=\tan\left(\frac{2}{3}\pi\pm\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.

5. C 【解析】由题意知 $F(c,0)$ 到直线 $bx-ay=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$,所以 $\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$,因为 $a^2+b^2=c^2$,所以 $b=\frac{\sqrt{3}a}{2}$,$c^2=\frac{7}{4}a^2$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. 故选 C.

6. B 【解析】由题意得 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\omega x$,则由 $2k\pi\leqslant\omega x\leqslant 2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{\omega}$,$k\in\mathbf{Z}$,则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2k\pi}{\omega},\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{\omega}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增,因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{5}\right]$ 上单调递增,所以 $\frac{\pi}{5}\leqslant\frac{\pi}{\omega}$,解得 $0<\omega\leqslant 5$,故选 B.

7. B 【解析】设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$,则 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,$\because$ 当 $x>0$ 时,$xf'(x)-f(x)<0$,
$\therefore$ 当 $x>0$ 时,$F'(x)<0$,即 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 由于 $f(x)$ 是奇函数,所以 $F(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=F(x)$,$F(x)$ 是偶函数,所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增.
又 $f(1)=f(-1)=0$,所以当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时,$F(x)=\frac{f(x)}{x}<0$;当 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$ 时,$F(x)=\frac{f(x)}{x}>0$. 所以当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时,$f(x)<0$. 即不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$. 故选 B.

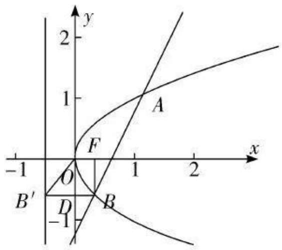
8. C 【解析】$\because\lambda,\mu$ 为正实数,$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$,$\therefore\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}$,$\therefore\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+4\mu\overrightarrow{AD}$. $\because P,B,D$ 共线,
$\therefore\lambda+4\mu=1$,$\therefore\lambda\mu=\frac{1}{4}\cdot(\lambda\cdot 4\mu)\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda+4\mu}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$,当且仅当 $\lambda=\frac{1}{2}$,$\mu=\frac{1}{8}$ 时取等号,
$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{4\mu}=(\lambda+4\mu)\cdot\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{4\mu}\right)=2+\frac{4\mu}{\lambda}+\frac{\lambda}{4\mu}\geqslant 4$,当且仅当 $\lambda=\frac{1}{2}$,$\mu=\frac{1}{8}$ 时取等号.
故选 C.

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. AB 【解析】对于 A:因为 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\mathrm{i}$,所以 $z^{30}=\mathrm{i}^{30}=\mathrm{i}^{4\times 7+2}=\mathrm{i}^2=-1$,故 A 正确;
对于 B:设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,代入 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$,得 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$,整理得 $y=x$,即点 Z 在直线 $y=x$ 上,故 B 正确;
对于 C:$(x^2-1)+(x^2+3x+2)\mathrm{i}$ 是纯虚数,则 $\begin{cases}x^2-1=0,\\ x^2+3x+2\neq 0,\end{cases}$ 即 $x=1$,故 C 错误;
对于 D:复数 $z=2-\mathrm{i}$ 的虚部为 -1,故 D 错误. 故选:AB.

10. AC 【解析】设切点为 $\left(x_0,\frac{x_0}{e^{x_0}}\right)$,则 $y'|_{x=x_0}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$,所以切线方程为:$y-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(x-x_0)$,切线过点 $A(a,0)$,代入得:$-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(a-x_0)$,即方程 $x_0^2-ax_0+a=0$ 有两不等根,则有 $\Delta=a^2-4a>0\Rightarrow a>4$ 或 $a<0$. 故选:AC.

11. BCD 【解析】对于选项 A，由题意知 $|OF|=\frac{1}{4}$，且 BF 垂直于 x 轴，根据抛物线的定义可知 $|BF|=|BB'|=\frac{1}{2}$. 设 BB' 与 y 轴的交点为 D，易知 $|OD|=|BF|=\frac{1}{2}$，$|B'D|=\frac{1}{4}$，故 $|OB'|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$，所以四边形 $OFBB'$ 的周长为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{5+\sqrt{5}}{4}$，选项 A 错误；对于选项 B，由题意得 $|AF|=x_1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，解得 $x_1=1$，所以 $y_1=\pm1$，从而 $S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{8}$，选项 B 正确；对于选项 C，若直线 AB 过点 F，设直线 AB：$x=my+\frac{1}{4}$，联立直线 AB 与抛物线方程得 $y^2-my-\frac{1}{4}=0$，则 $y_1y_2=-\frac{1}{4}$，$x_1x_2=\frac{1}{16}$，所以 $2x_1+x_2\geqslant2\sqrt{2x_1x_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，选项 C 正确；对于选项 D，设直线 AB：$x=my+t$，联立直线 AB 与抛物线方程得 $y^2-my-t=0$，则 $y_1y_2=-t$，所以 $x_1x_2=y_1^2y_2^2=t^2$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{4}$ 可得 $x_1x_2+y_1y_2=-\frac{1}{4}$，即 $t^2-t=-\frac{1}{4}$，解得 $t=\frac{1}{2}$，故直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{1}{2}$，即直线 AB 恒过定点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，选项 D 正确. 故选：BCD.



12. ACD 【解析】对于 A，由 $A_1E=A_1D=2$，则 $S_{\triangle A_1EC}=\frac{1}{2}\times A_1E\times EC\times\sin\angle A_1EC=2\sqrt{2}\sin\angle A_1EC$，所以当 $\angle A_1EC=\frac{\pi}{2}$ 时 $S_{\triangle A_1EC}$ 最大，且最大值为 $2\sqrt{2}$，故 A 正确.

对于 B，取 A_1D 的中点 G，连接 EG，MG，显然 $MG/\!/CD$，且 $MG=\frac{1}{2}CD$，又 $BE/\!/CD$，$BE=\frac{1}{2}CD$，所以四边形 $MGEB$ 为平行四边形，所以 $BM/\!/EG$，又 $A_1E=2$，且 $DE=2\sqrt{2}$，G 为 A_1D 的中点，则 EG 与 A_1D 不垂直，所以 BM 与 A_1D 不垂直，故 B 错. 对于 C，易知三棱锥 A_1-EDC 体积最大时，平面 $A_1DE\perp$ 平面 DEC，交线为 DE，又 $CE\perp DE$，所以 $CE\perp$ 平面 A_1DE，又 $A_1D\perp A_1E$，所以 A_1D，A_1E，EC 两两垂直，且 $A_1E=A_1D=2$，$EC=2\sqrt{2}$，则三棱锥 A_1-CDE 的外接球的半径和长、宽、高分别为 $2,2,2\sqrt{2}$ 的长方体的外接球的半径相等，所以其外接球的半径为 $R=\frac{\sqrt{2^2+2^2+(2\sqrt{2})^2}}{2}=2$，表面积为 16π，故 C 正确.

对于 D，由选项 C 可知 $PE\perp EQ$，$\therefore EN=1$，$\therefore$ 点 N 在以 E 为球心，1 为半径的球面上，设点 E 到平面 A_1DC 的距离为 d，因为 $V_{E-A_1CD}=V_{A_1-DCE}$，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1CD}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle EDC}\cdot\sqrt{2}$，易知 $A_1C=2\sqrt{3}$，$CD=4$，$A_1D=2$，$\therefore S_{\triangle A_1CD}=2\sqrt{3}$，$S_{\triangle EDC}=4$，$d=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所以点 N 到平面 A_1DC 的距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}-1$，选项 D 正确，故选 ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 5 【解析】由题意得 $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$，则直线 AC 的单位方向向量 $\boldsymbol{u}=\left(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$，所以 AC 边上的高 BD 的长即 B 到 AC 的距离，为 $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{41-16}=5$.

14. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ 【解析】因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{\cos2x+1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，由题意得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x_0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{10}$，$\therefore\sin\left(2x_0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$. 又 $x_0\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$，$\therefore2x_0-\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore\cos\left(2x_0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$.

$\therefore\cos2x_0=\cos\left[\left(2x_0-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(2x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sin\left(2x_0-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

15. $\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}-2\right]$ 【解析】由函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1(x>-1),\\ \mathrm{e}^x(x\leqslant-1)\end{cases}$ 的图象可知，若 $a<b$，$f(a)=f(b)$，则 $2b-1=\mathrm{e}^a$，则 $a-2b=a-\mathrm{e}^a-1$，$a\leqslant-1$. 令 $g(a)=a-\mathrm{e}^a-1$，$a\leqslant-1$，则 $g'(a)=1-\mathrm{e}^a\geqslant1-\frac{1}{\mathrm{e}}>0$ 恒成立，故 $g(a)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递增，所以 $g(a)\leqslant g(-1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}-2$，即实数 $a-2b$ 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}}-2\right]$.

16. 2026 【解析】$\because a_{i,1}=1-\frac{1}{2^{i-1}}(i\in\mathbf{N}^*)$，$a_{i,j}=a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j}(2\leqslant j\leqslant i-1)$，

$\therefore a_{m,2}=a_{m-1,1}+a_{m-1,2}=a_{m-1,1}+a_{m-2,1}+a_{m-2,2}=a_{m-1,1}+a_{m-2,1}+\cdots+a_{2,1}+a_{2,2}$

$=\left(1-\frac{1}{2^{m-2}}\right)+\left(1-\frac{1}{2^{m-3}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^1}\right)+\frac{1}{2}=(m-2)-\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}\right]}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=m-\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}$.

因为若 $a_{m,2}>2023$，则 $m-\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}>2023$，即 $m>2025+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}$，显然 $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}<\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$0<\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}<1$，即 $2025<2025+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}<2026$，所以正整数 m 的最小值为 2026.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) $a_1=\sqrt{2}$，$a_n>0$，$a_{n+1}\cdot(S_{n+1}+S_n)=2$，可得 $(S_{n+1}-S_n)(S_{n+1}+S_n)=2$，

可得 $S_{n+1}^2-S_n^2=2$，即数列 $\{S_n^2\}$ 为首项为 2，公差为 2 的等差数列， …………………………………… 3 分

可得 $S_n^2=2+2(n-1)=2n$，由 $a_n>0$，可得 $S_n=\sqrt{2n}$； …… 5分

(2) $\frac{1}{S_n+S_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2(n+1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$， …… 7分

即有 $\frac{1}{S_1+S_2}+\frac{1}{S_2+S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n+S_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n+1}-1)$． …… 10分

18.【解析】(1)由余弦定理，得 $\frac{a^2+b^2}{ab}=4\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即 $a^2+b^2=2c^2$，所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=2$． …… 4分

(2)由 $\frac{1}{\tan B}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}$，

即 $\cos B=\frac{\sin^2 B}{\sin A\sin C}=\frac{b^2}{ac}\Rightarrow\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2}{ac}$，即 $a^2+c^2=3b^2$， …… 8分

又 $a^2+b^2=2c^2$，所以 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$，$a=\frac{\sqrt{5}}{2}c$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{3}{4}c^2+c^2-\frac{5}{4}c^2}{2c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}c}=\frac{\sqrt{3}}{6}$． …… 12分

19.【解析】(1)设 A_n，B_n 分别为第 n 年投入的电力型公交车、混合动力型公交车的数量，

依题意，得 $\{A_n\}$ 是首项为128，公比为 $1+50\%=\frac{3}{2}$ 的等比数列，$\{B_n\}$ 是首项为400，公差为 a 的等差数列．所以 $\{A_n\}$ 的前 n 项

和 $S_n=\frac{128\times\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{2}}=256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]$， …… 4分

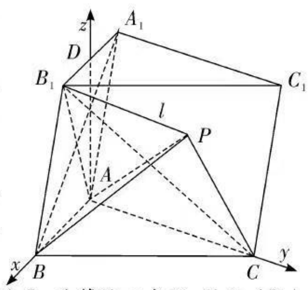
$\{B_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=400n+\frac{n(n-1)}{2}a$．所以经过 n 年，该市被更换的公交车总数为 $S(n)=S_n+T_n=256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]+400n+$

$\frac{n(n-1)}{2}a$． …… 6分

(2)若计划7年内完成全部更换，则 $S(7)\geqslant 10000$，所以 $256\left[\left(\frac{3}{2}\right)^7-1\right]+400\times 7+\frac{7\times 6}{2}a\geqslant 10000$，

即 $21a\geqslant 3082$，所以 $a\geqslant 146\frac{16}{21}$．又 $a\in\mathbf{N}^*$，所以 a 的最小值为147． …… 12分

20.【解析】(1)证明：因为四边形 AA_1B_1B 为菱形，所以 $A_1B\perp AB_1$，又因为平面 $AA_1B_1B\perp$ 平面 ABC，平面 $AA_1B_1B\cap$ 平面 $ABC=AB$，$AC\subset$ 平面 ABC，$AC\perp AB$，所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B， …… 2分



又 $A_1B\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $AC\perp A_1B$，又 $AB_1\cap AC=A$，$AC\subset$ 平面 B_1AC，$AB_1\subset$ 平面 B_1AC，

所以 $A_1B\perp$ 平面 B_1AC， …… 4分

又 $B_1C\subset$ 平面 B_1AC，所以 $A_1B\perp B_1C$． …… 5分

(2)解：l 上不存在点 P，使 A_1B 与平面 ABP 所成角为 $30°$．理由如下：

取 A_1B_1 中点 D，连接 AD，因为 $\angle ABB_1=60°$，所以 $\angle AA_1B_1=60°$，又 $AA_1=A_1B_1$，所以 $\triangle AA_1B_1$ 为等边三角形，所以 $AD\perp A_1B_1$，因为 $A_1B_1/\!/AB$，所以 $AD\perp AB$，又平面 $AA_1B_1B\perp$ 平面 ABC，平面 $AA_1B_1B\cap$ 平面 $ABC=AB$，$AD\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $AD\perp$ 平面 ABC， …… 7分

以 A 为原点，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(-1,0,\sqrt{3})$，$B_1(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,\sqrt{3})$．因为 $AC/\!/A_1C_1$，$AC\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AC/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$，又 $AC\subset$ 平面 AB_1C，平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $AB_1C=l$，所以 $AC/\!/l$， …… 8分

假设 l 上存在一点 P，使 A_1B 与平面 ABP 所成角为 $30°$，设 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$，

则 $\overrightarrow{B_1P}=(0,2\lambda,0)$，所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1P}=(1,2\lambda,\sqrt{3})$，设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ABP 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}2x=0,\\ x+2\lambda y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $y=-\sqrt{3}$，则 $z=2\lambda$，可取 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{3},2\lambda)$， …… 10分

又 $\overrightarrow{A_1B}=(3,0,-\sqrt{3})$，所以 $\sin 30°=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1B}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1B}|}=\frac{|2\sqrt{3}\lambda|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+4\lambda^2}}=\frac{1}{2}$，

即 $3+4\lambda^2=4\lambda^2$，此方程无解，

因此，l 上不存在点 P，使 A_1B 与平面 ABP 所成角为 $30°$. ………… 12 分

21.【解析】(1)设椭圆的半焦距为 c，

由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a+c=3$，解得 $a=2,c=1$，

故 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………… 4 分

(2)当矩形 $ABCD$ 的一组对边斜率不存在时，易得矩形 $ABCD$ 的面积 $S=8\sqrt{3}$； ………… 5 分

当矩形 $ABCD$ 四边斜率都存在时，

不妨设 AB,CD 所在直线的斜率为 k，则 BC,AD 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$

得 $(4k^2+3)x^2+8mkx+4m^2-12=0$，

由 $\Delta=(8mk)^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)=0$，得 $m^2=4k^2+3$， ………… 7 分

显然直线 CD 的方程为 $y=kx-m$，

则直线 AB 与 CD 间的距离为 $d_1=\frac{2|m|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{\frac{m^2}{k^2+1}}=2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$，

同理，BC 与 AD 间的距离为 $d_2=2\sqrt{\frac{\frac{4}{k^2}+3}{\frac{1}{k^2}+1}}=2\sqrt{\frac{4+3k^2}{k^2+1}}$， ………… 9 分

所以矩形 $ABCD$ 的面积为：

$S=d_1d_2=4\sqrt{\frac{3+4k^2}{k^2+1}}\cdot\sqrt{\frac{4+3k^2}{k^2+1}}=4\sqrt{\frac{12k^4+25k^2+12}{k^4+2k^2+1}}$

$=4\sqrt{12+\frac{k^2}{k^4+2k^2+1}}=4\sqrt{12+\frac{1}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}}\leqslant 4\sqrt{12+\frac{1}{4}}=14$(当且仅当 $k=\pm1$ 时等号成立)，

又 $S_{矩形ABCD}>4\sqrt{12}=8\sqrt{3}$，所以 $8\sqrt{3}<S\leqslant 14$.

综上，椭圆 C 的外切矩形 $ABCD$ 面积的取值范围是 $[8\sqrt{3},14]$. ………… 12 分

22.【解析】(1)函数 $f(x)=x-a\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{a}{x}$， ………… 1 分

①当 $a<0$ 时，$f'(x)=1-\frac{a}{x}>0$，所以函数 $f(x)$ 单调递增，

又 $f(e^{\frac{1}{a}})=e^{\frac{1}{a}}-a\ln e^{\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{a}}-1<0$，$f(1)=1>0$，所以函数 $f(x)$ 有唯一零点. ………… 3 分

②当 $a=0$ 时，$f(x)=x>0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 无零点， ………… 4 分

③当 $0<a<e$ 时，令 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}=0$，得 $x=a$，当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增. 则 $f(x)_{\min}=f(a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)>0$，所以函数 $f(x)$ 无零点. ………… 5 分

综上所述，当 $0\leqslant a<e$ 时，函数 $f(x)$ 无零点；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点. ………… 6 分

(2)当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant ax^a\ln x-xe^x$ 恒成立，即 $xe^x+x\geqslant ax^a\ln x+a\ln x$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，即 $xe^x+x\geqslant(a\ln x)e^{a\ln x}+a\ln x$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，设函数 $g(x)=xe^x+x$，$x\in(1,+\infty)$，则 $g(x)\geqslant g(a\ln x)$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，
………… 8 分

则 $g'(x)=(x+1)e^x+1>0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(x)\geqslant g(a\ln x)$，所以 $x\geqslant a\ln x$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，即 $a\leqslant\frac{x}{\ln x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立. ………… 10 分

设 $h(x)=\frac{x}{\ln x}$，$x\in(1,+\infty)$，令 $h'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0$，得 $x=e$，当 $x\in(1,e)$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(e)=e$，故 $a\leqslant e$. 故 a 的取值范围是 $(-\infty,e]$. ………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。