秘密★启用前

巴蜀中学2021届高考适应性月考卷（九）
数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid x^2=4\}$，则 $\complement_M N=$

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{-2,-1,0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 已知复数 z 的共轭复数是 $\bar{z}$，若 $z-3\bar{z}=1+2i$，则 $|z|=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{5}{2}$

3. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$，若直线 $m\subset\alpha$，直线 $n\perp\beta$，则 m，n 的位置关系是

A. 平行　　B. 相交

C. 异面　　D. 以上情况都有可能

4. 甲、乙、丙三人被系统随机地预约到 A，B，C 三家医院接种新冠疫苗，每家医院恰有1人预约．已知 A 医院接种的是只需要打一针的腺病毒载体新冠疫苗，B 医院接种的是需要打两针的灭活新冠疫苗，C 医院接种的是需要打三针的重组蛋白新冠疫苗，问甲不接种只打一针的腺病毒载体新冠疫苗且丙不接种需要打三针的重组蛋白新冠疫苗的概率等于

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{9}$

5. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，则切点的纵坐标为

A. e　　B. 1

C. $\frac{1}{\sqrt{e}}$　　D. $\frac{1}{e}$

6. 已知 $\tan2\alpha=-2\sqrt{2}$，其中 α 是第三象限角，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ 的值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

7. 城市道路由于通勤造成道路交通的早晚高峰. 一般地，工作日早高峰时段通常在7：00–9：00，晚高峰时段通常在17：00–19：00. 为了衡量某路段在某一段时间内的拥堵程度，通常采用的指标之一是路段的汽车平均行程速度，即在该时间段通过该路段的汽车的平均速度. 路段通常可分为快速路、主干路、次干路、支路，根据不同路段与汽车平均行程速度，可将拥堵程度分为1到5级. 等级划分如下表（单位：km/h）：

	等级				
	1	2	3	4	5
快速路	>65	(50，65]	(35，50]	(20，35]	≤20
主干路	>45	(35，45]	(25，35]	(15，25]	≤15
次干路	>35	(25，35]	(15，25]	(10，15]	≤10
支路	>35	(25，35]	(15，25]	(10，15]	≤10

重庆市的黄花园大桥横跨嘉陵江之上，是连接渝中区和江北区的主干路. 今在某高峰时段监测黄花园大桥的汽车平均行程速度，将得到的数据绘制成频率分布直方图如图1，根据统计学知识估计该时段黄花园大桥拥堵程度的等级为

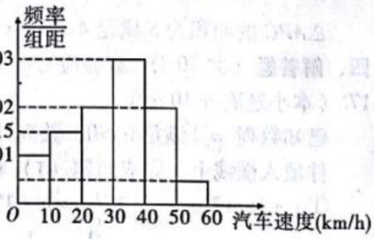

图1

A. 2级

B. 3级

C. 4级

D. 5级

8. 已知圆 C：$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=3$ 交直线 $y=\sqrt{3}x-1$ 于 A，B 两点，则对于 $\theta\in\mathbf{R}$，线段 AB 长度的最小值为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分）

9. 已知正实数 a，b 满足 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则下列不等式成立的有

A. $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2}$　　B. $a^2+b^2<1$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 4$　　D. $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$

10. 函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1(x\leqslant 0),\\ \log_2 x(x>0),\end{cases}$ 则下列说法正确的有

A. 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数

B. 对于任意实数 a，不等式 $f(a^2+1)\geqslant f(-a)$ 恒成立

C. 若 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2<0$

D. 方程 $f(x)-f(-x)=0$ 有3个不相等实数解

11. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1+a_2=2$，$a_{n+1}=S_n+1$，则

A. 数列 $\{a_n\}$ 是公比为2的等比数列　　B. $S_6=47$

C. $\frac{a_n}{S_n}$ 既无最大值也无最小值　　D. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{10}{3}$

12. 双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过右焦点 F_2 且斜率为 k 的直线交右支于 P，Q 两点，以 F_1Q 为直径的圆过点 P，则

A. 若 $\triangle PF_1Q$ 的内切圆与 PF_1 相切于 M，则 $F_1M=a$

B. 若双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$，则 $\triangle PF_1Q$ 的面积为24

C. 存在离心率为 $\sqrt{5}$ 的双曲线满足条件

D. 若 $3PF_2=QF_2$，则双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填写在答题卡相应位置上）

13. 已知平面内的 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 两个向量同时满足：$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角等于________.

14. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ 的右焦点为 F，若过 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的取值范围是____________.

15. 端午节是中国的传统节日，“咸蛋黄”口味的粽子也越来越受人们的喜爱，高三年级各班进行了包粽子大赛，我们把粽子的形状近似为一个正四面体，蛋黄近似为一个球体，当这个球体与正四面体的六条棱都相切时小组获得奖励，若某小组获得了奖励，他们包的粽子棱长为3，则放入粽子的蛋黄的表面积等于________.

16. 在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2b\cos C+2c\cos B=a^2$，则 $a=$______；若又知△ABC 的面积为 S 满足 $4\sqrt{3}S=a^2+b^2+c^2$，则 $S=$______．（第一空2分，第二空3分）

四、解答题（共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分10分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若____________，在以下三个条件中任选一个条件填入横线上，完成问题（1）和（2）：

①$a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=n\cdot 3^n(n\in\mathbf{N}_+)$；

②数列 $\{c_n\}$ 满足：$c_n=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$，$a_1=3$，且 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{3}$；

③$S_n=\frac{(a_n+1)^2}{4}-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

问题：（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）数列 $\{b_n\}$ 是首项和公比均为2的等比数列，求数列 $\{a_{b_n}\}$ 中有多少个小于2021的项.

18.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2\frac{x}{2}+a$，$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 的最小值为0.

（1）求常数 a 的值；

（2）若把 $y=f(x)$ 图象上的点纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（其中 $\omega>0$），得到 $y=g(x)$ 的图象．若 $y=g(x)$ 在区间 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有2个零点，求 ω 的取值范围.

19.（本小题满分12分）

如图2，在直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$，点 $M(x_0,\ 2)(x_0>0)$ 是抛物线 C 上的一点，点 M 到焦点的距离为 $\frac{5}{2}$.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过 C 上异于点 M 的两点 A，B 分别作 x 轴的垂线交直线 BM，AM 于点 P，Q，求直线 PQ 的斜率.

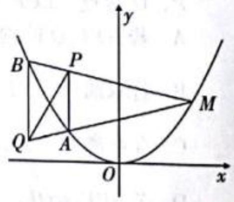

图2

20.（本小题满分 12 分）

随着校运会的临近，某班甲、乙两名同学开始记录自己 100 米短跑的成绩，他们二人的某 10 次的成绩（单位：秒）如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	11.6	12.2	13.2	13.9	14.0	11.5	13.1	14.5	11.7	14.3
乙	12.3	13.3	14.3	11.7	12.0	12.8	13.2	13.8	14.1	12.5

（1）请完成如图 3 的样本数据的茎叶图（在答题卡中），并分析甲、乙二人的成绩情况；

（2）从甲、乙两人的 10 次成绩中各随机抽取一次分别记为 x，y，定义随机变量 $\xi=\begin{cases}1(x>y),\\0(x=y),\\-1(x<y),\end{cases}$ 求 ξ 的分布列和期望.

图 3

21.（本小题满分 12 分）

如图 4，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，侧面 ACC_1A_1 为等腰梯形，且 $A_1C_1=AA_1=1$，D 为 A_1C_1 的中点.

（1）证明：$AC\perp BD$；

（2）记二面角 A_1-AC-B 的大小为 θ，$\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 时，求直线 AA_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值的取值范围.

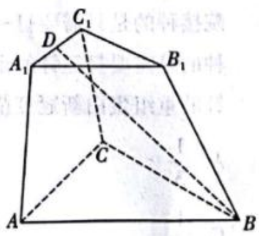

图 4

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{x+1}$，$g(x)=\ln(x+1)-ax^2-2ax$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）证明：当 $x>0$ 时，$f(x)<0$；

（2）若 $g(x)<f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

巴蜀中学2021届高考适应性月考卷（九）
数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	B	A	B	C

【解析】

1．由题意，$M=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，$N=\{-2,\ 2\}$，则$\complement_M N=\{-1,\ 0,\ 1\}$，故选B.

2．设$z=a+bi$，则$\overline{z}=a-bi$，由题意，$-2a+4bi=1+2i$，则$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$，所以$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选A.

3．由题意，直线m，n可以平行（直二面角时），可以相交，也可以异面，故选D.

4．甲、乙、丙三人被系统随机地预约到$A,\ B,\ C$三家医院接种新冠疫苗的情况有$A_3^3=6$种，$P=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，故选C.

5．设切点$P(x_0,\ \ln x_0)(x_0>0)$，由$y'=\dfrac{1}{x}$得曲线在点P处的切线l方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，$l$过$(0,\ 0)$，则$-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(-x_0)$，解得$x_0=\mathrm{e}$，所以$P(\mathrm{e},\ 1)$，故选B.

6．由$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$且$\alpha$是第三象限角得$\tan\alpha=\sqrt{2}$，$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，因此$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，故选A.

7．由题意知组距为10，共6组，由六个矩形面积之和为1，求得速度在[50，60]内的频率为0.05，因此平均速度为$5\times0.1+15\times0.15+25\times0.2+35\times0.3+45\times0.2+55\times0.05=30$（km/h），根据表格拥堵等级为3，故选B.

8．易知该圆的半径$r=\sqrt{3}$，圆心$C(\cos\theta,\ \sin\theta)$在单位圆上，因为原点$O$到直线$y=\sqrt{3}x-1$的距离为$\dfrac{1}{2}$，则点$C$到直线$y=\sqrt{3}x-1$的距离$d$的最大值为$\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，由$AB=2\sqrt{r^2-d^2}$可知，当$d$取最大值$\dfrac{3}{2}$时，线段$AB$长度的最小值为$\sqrt{3}$，故选C.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分）

题号	9	10	11	12
答案	ABD	BD	BD	BD

【解析】

9. $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2}$，A 正确；$a^2+b^2<a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=1$，B 正确；$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{ab}\geqslant\dfrac{1}{\frac{(a+b)^2}{4}}=4$，C 错误；$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$，虽然不能取等，但不等式成立，D 正确，故选 ABD.

10. 函数 $f(x)$ 是 $(-\infty，0]$ 和 $(0，+\infty)$ 上的单调递增函数，但是 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调，A 错误；当 $a\geqslant 0$ 时，$f(a^2+1)\geqslant f(1)=0$，$f(-a)\leqslant f(0)=0$，$f(a^2+1)\geqslant f(-a)$；当 $a<0$ 时，$a^2+1>-a>0$，由函数 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增知 $f(a^2+1)>f(-a)$；B 正确；令 $x_1=0$，$x_2=1$，$f(x_1)=f(x_2)$，且 $x_1+x_2>0$，C 错误；当 $x=0$ 时，$f(x)-f(-x)=0$；当 $x>0$ 时，$g(x)=f(x)-f(-x)=\log_2 x-2^{-x}+1$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$，$g(1)=\dfrac{1}{2}>0$，故存在 1 个解；同理知 $x<0$ 时也存在 1 个解；故方程 $f(x)-f(-x)=0$ 共有 3 个解，D 正确，故选 BD.

11. 令 $n=1$，知 $a_2=S_1+1=a_1+1$，结合 $a_1+a_2=2$，知 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=S_n+1\Rightarrow a_n=S_{n-1}+1\Rightarrow a_{n+1}-a_n=a_n(n\geqslant 2)$，但 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{a_2}{a_1}=3\neq 2$，

故 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}，n=1,\\ \dfrac{3}{2}\cdot 2^{n-2}=3\cdot 2^{n-3}，n\geqslant 2,\end{cases}$ $S_n=\dfrac{\frac{3}{2}(1-2^{n-1})}{1-2}+\dfrac{1}{2}=3\times 2^{n-2}-1$，$S_6=3\times 16-1=47$，

故 A 错误，B 正确；$\dfrac{a_1}{S_1}=1$，$n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{a_n}{S_n}=\dfrac{3\times 2^{n-3}}{3\times 2^{n-1}-1}=\dfrac{3}{12-\frac{1}{2^{n-3}}}\in\left(\dfrac{1}{4}，\dfrac{3}{10}\right]$，所以 $\dfrac{a_n}{S_n}$ 无最小值，有最大值，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2+\dfrac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}<\dfrac{10}{3}$，故选 BD.

12．记内切圆与 PQ 相切于 N，与 F_1Q 相切于 K，则 $PM=PN, QK+QN$；故 $F_1P+F_1Q-PQ=F_1M+F_1K+PM+QK-PN-QN=F_1M+F_1K=2F_1M=4a$，A 不正确；由以 F_1Q 为直径的圆过点 P，知 $PF_1\perp PQ$；若双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$，则 $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{10}$；设 $PF_1=x, QF_2=y$，则 $PF_2=x-4, QF_1=y+4$，故 $x^2+(x-4)^2=(2\sqrt{10})^2=40\Rightarrow x=6$，$6^2+(2+y)^2=(4+y)^2\Rightarrow y=6$；故△$PF_1Q$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 6\times(2+6)=24$，B 正确；若 $e=\sqrt{5}$，则 $\frac{b}{a}=2$，故渐近线为 $y=\pm 2x$，设 $PF_1=y, PF_2=x$，

由 $\begin{cases} y-x=2a, \\ y^2+x^2=4c^2, \\ \frac{c}{a}=\sqrt{5}, \end{cases}$ 得 $y=2x$，则 $k=\pm 2$，此时直线不可能与右支交于两点，故 C 不正确；

若 $3PF_2=QF_2$，设 $PF_2=x, QF_2=3x$，则 $PF_1=x+2a, QF_1=3x+2a$，故 $(x+2a)^2+(4x)^2=(3x+2a)^2\Rightarrow x=a$，故 $(a+2a)^2+a^2=(2c)^2\Rightarrow e=\frac{\sqrt{10}}{2}$，D 正确，故选 BD.

三、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	120°	$\left[\frac{1}{2}, 2\right]$	$\frac{9}{2}\pi$	$2, \sqrt{3}$

【解析】

13. $|\vec{a}^2|-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}^2|=3(|\vec{a}^2|+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}^2|)$，则 $-8\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}^2|+2|\vec{b}^2|-8|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=2|\vec{a}^2|+2|\vec{b}^2|$，由于 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，因此 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，则 $\theta=120^\circ$.

14. 由椭圆性质可知，当 A, B 分别为椭圆的顶点时，$\frac{AF}{BF}$ 取最值. 当 A 为椭圆的右顶点时，AF 最小，此时 $AF=3-1=2$，此时 B 恰为椭圆的左顶点，BF 最大，此时 $BF=3+1=4$，此时 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，同理可得 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的最大值为 2，即 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

15．设题中的正四面体为 $ABCD$，将它放置于正方体内，如图 1 所示，此时可得该正方体的内切球恰好与正四面体的六条棱都相切．设正方体棱长为 x，则 $\sqrt{2}x=3$，解得 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，因此正方体的内切球直径 $2r=x$，得 $r=\dfrac{x}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，因此正方体内切球的表面积 $S=4\pi r^2=\dfrac{9\pi}{2}$．

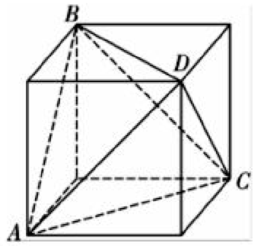

图 1

16．由正弦定理得 $2\sin B\cos C+2\sin C\cos B=a\sin A$，$2\sin A=a\sin A$，因此 $a=2$，$4\sqrt{3}S=4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}bc\sin A=b^2+c^2+a^2$，因此 $2\sqrt{3}bc\sin A=b^2+c^2+b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=\dfrac{b^2+c^2}{bc}=\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}$，由于 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 2$，$\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\geqslant 2$，当且仅当 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$b=c$ 时等式成立，因此 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4$，解得 $b=c=2$，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$．

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）选①：

当 $n=1$，$a_1=3$，

当 $n\geqslant 2$，$a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1}=(n-1)\cdot 3^{n-1}$，

作差有 $3^{n-1}a_n=(2n+1)\cdot 3^{n-1}$，则 $a_n=2n+1$，

又 $a_1=2+1=3$，符合，

所以 $a_n=2n+1$．……………………………………………………………………（5 分）

选②：

$$c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{3},$$

又 $a_1=3$，所以 $a_{n+1}=2n+3$，

所以 $a_n=2n+1$．……………………………………………………………………（5 分）

选③：

当 $n=1$，$a_1=3$，

$n\geqslant 2$，$S_{n-1}=\dfrac{(a_{n-1}+1)^2}{4}-1(n\in \mathbf{N}_+)$，

作差：$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(a_n+1)^2}{4}-\dfrac{(a_{n-1}+1)^2}{4}$，

$4a_n=a_n^2+2a_n+1-a_{n-1}^2-2a_{n-1}-1$，

所以 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，$a_n>0$，有 $a_n-a_{n-1}=2$，

故数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=3$，$d=2$，

所以 $a_n=2n+1$．……………………………………………………………（5 分）

（2）$b_n=2^n$，$a_{b_n}=2b_n+1=2^{n+1}+1$，易知 $\{a_{b_n}\}$ 为单调递增数列，

又 $2^{10}=1024<2021$，$2^{11}=2048>2021$，

所以 $n+1\leqslant 10$，$n\leqslant 9$，$n\in \mathbf{N}^*$，所以有 9 项符合．…………………………………（10 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+a+1=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+a+1$，

………………………………………………………………………………………（3 分）

当 $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，$x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$，

则 $f(x)_{\min}=1+a+1=0$，则 $a=-2$．…………………………………………………（6 分）

（2）$f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$，则 $g(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$，

令 $g(x)=0$，则 $\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，

令 $t=\omega x+\dfrac{\pi}{6}$，则 $\sin t=\dfrac{1}{2}$，当 $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，$t\in\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}\right]$，

………………………………………………………………………………………（8 分）

则问题转化为 $y=\sin t$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上有且仅有 2 个 t，使得 $\sin t=\dfrac{1}{2}$，求 ω 的取值范围．作出 $y=\sin t$ 和 $y=\dfrac{1}{2}$ 的图象，如图 2，观察交点个数，

由题意列不等式：$\dfrac{5\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13\pi}{6}$，

解得 $\dfrac{4}{3}\leqslant\omega<4$．…………………（12 分）

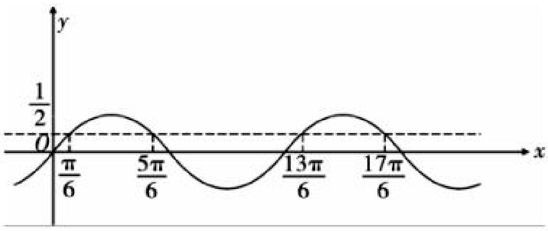

图 2

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题，$2+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$，则 $p=1$，

$\therefore x^2=2y$. ……………………………………………………………………（4 分）

（2）$\because M(x_0,\ 2)$ 在抛物线 C 上，且 $x_0>0$，$\therefore x_0^2=4$，$x_0=2$，

设 $A(2x_1,\ 2x_1^2)$，$B(2x_2,\ 2x_2^2)$，

则直线 AM 的方程为 $y-2=\frac{2x_1^2-2}{2x_1-2}(x-2)$，即 $y=(x_1+1)x-2x_1$，

……………………………………………………………………………………（8 分）

同理直线 BM 的方程为 $y=(x_2+1)x-2x_2$，

由 AP，BQ 分别垂直于 x 轴，得点 $P(2x_1,\ 2(x_1x_2+x_1-x_2))$，$Q(2x_2,\ 2(x_1x_2-x_1+x_2))$，

……………………………………………………………………………………（10 分）

则直线 PQ 的斜率 $k=\frac{4(x_1-x_2)}{2(x_1-x_2)}=2$. ………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）茎叶图如图 3，

甲	茎	乙
5 6 7	11	7
2	12	0 3 5 8
2 1 9	13	2 8 3
5 3 0	14	3 1

图 3

$$\overline{x_{甲}}=\frac{11\times3+12\times1+13\times3+14\times3+0.1\times1+0.2\times2+0.3\times1+0.5\times2+0.6\times1+0.7\times1+0.9\times1}{10}$$

$=13.0$,

$$\overline{x_{乙}}=\frac{11\times1+12\times4+13\times3+14\times2+0.1\times1+0.2\times1+0.3\times3+0.5\times1+0.7\times1+0.8\times2}{10}=13.0,$$

从统计图中可以看出，甲、乙的平均水平是一样的；乙的成绩较为集中，差异程度较小，所以乙的成绩更稳定.

(若学生从中位数分析也同样给分，甲的中位数为 $\frac{13.1+13.2}{2}=13.15$，乙的中位数为 $\frac{12.8+13.2}{2}=13.0$．)……………………………………………………（6 分）

（2）由茎叶图可计算：$P(\xi=0)=\dfrac{3}{C_{10}^1C_{10}^1}=\dfrac{3}{100}$；

$P(\xi=-1)=\dfrac{10+10+9+8+5+4+2+2}{C_{10}^1C_{10}^1}=\dfrac{50}{100}=\dfrac{1}{2}$；

$P(\xi=1)=1-\dfrac{50}{100}-\dfrac{3}{100}=\dfrac{47}{100}$，

ξ 的分布列为：

ξ	-1	0	1
P	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{100}$	$\dfrac{47}{100}$

$E(\xi)=-1\times\dfrac{1}{2}+0+1\times\dfrac{46}{100}=-\dfrac{3}{100}$．……………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 4，作 AC 的中点 M，连接 DM，BM，

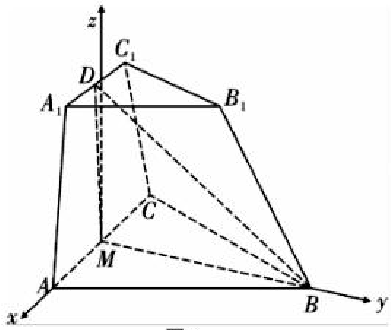

图 4

在等腰梯形 ACC_1A_1 中，D，M 为 A_1C_1，AC 的中点，

$\therefore AC\perp DM$，……………………………（1 分）

在正△ABC 中，M 为 AC 的中点，

$\therefore AC\perp BM$，……………………………（2 分）

$\because AC\perp DM$，$AC\perp BM$，$DM\cap BM=M$，

DM，$BM\subset$ 平面 BDM，

$\therefore AC\perp$ 平面BDM，

又 $BD\subset$ 平面BDM，$\therefore AC\perp BD$．…………………………………………………………（5 分）

（2）解：$\because AC\perp$ 平面BDM，

在平面 BDM 内作 $Mz\perp BM$，以 M 为坐标原点，以 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{Mz}$ 分别为 x，y，z 轴正向，

如图建立空间直角坐标系，

$\because DM\perp AC$，$BM\perp AC$，$\therefore\angle DMB$ 为二面角 A_1-AC-B 的平面角，即 $\angle DMB=\theta$，

……………………………………………………………………………………………（7 分）

$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$C(-1,\ 0,\ 0)$，$D\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

$C_1\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，$A_1\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{CB}=(1,\ \sqrt{3},\ 0)$，$\overrightarrow{CC_1}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{CC_1}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\cdot y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cdot z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\left(-\sqrt{3},\ 1,\ \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$，

又 $\overrightarrow{AA_1}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，

$\therefore\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AA_1},\ \vec{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+\dfrac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{1+\cos\theta}}}$，

$\because\theta\in\left[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore\cos\theta\in\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$，

$\therefore\sin\alpha\in\left[\dfrac{\sqrt{21}}{7},\ \dfrac{3\sqrt{13}}{13}\right]$. ……………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

（1）证明：当 $x>0$ 时，$f(x)<0\Leftarrow\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{1}{x+1}\Leftarrow e^x>x+1$，

令 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(x)>h(0)=0$，

$\therefore e^x>x+1$. ……………………………………………………………………………（5 分）

（2）解：由题 $g(x)-f(x)<0$，即 $\ln(x+1)-ax^2-2ax-e^{-x}+\dfrac{1}{x+1}<0$，

令 $F(x)=\ln(x+1)-ax^2-2ax-e^{-x}+\dfrac{1}{x+1}$，易知 $F(0)=0$，

且 $F'(x)=\dfrac{1}{x+1}-2ax-2a+e^{-x}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$，

要满足题意，必有 $F'(0)\leqslant 0$，则 $1-2a\leqslant 0$，$\therefore a\geqslant\dfrac{1}{2}$，……………………………（7 分）

当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，

$F(x)=\ln(x+1)-ax^2-2ax-e^{-x}+\dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-e^{-x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}(x^2+2x)$，

记 $\varphi(x)=\ln(x+1)-\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}(x^2+2x)$，$x>0$，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{(x+1)^2}-(x+1)<\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}-(x+1)$$

$$=\frac{(2x+1)-(x+1)^3}{(x+1)^2}<\frac{(2x+1)-(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{-x^2}{(x+1)^2}<0,$$

$\therefore\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，即当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$F(x)<\varphi(x)<0$，满足题意．

综上：$a\geqslant\dfrac{1}{2}$．…………………………………………………………………（12 分）