长治市第二中学校2020-2021学年高二下学期期末考试
数学试题（文科）

【本试卷满分150分，考试时间为120分钟】

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．已知集合 $A=\left\{x \mid y=\ln(-x^2+9)\right\}$，集合 $B=\left\{y \mid y=|x+1|\right\}$，则 $(C_R A)\cap B=$

A．$(-\infty,-3]$　　B．$[0,3)$　　C．$(-3,0]$　　D．$[3,+\infty)$

2．命题"$\exists x_0>0,\ \ln x_0<1-\frac{1}{x_0}$"的否定是

A．$\forall x\le 0,\ln x<1-\frac{1}{x}$　　B．$\forall x>0,\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$

C．$\forall x\le 0,\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$　　D．$\forall x>0,\ln x<1-\frac{1}{x}$

3．命题 $p:\forall x\in R,x^3<x^4$，命题 $q:\exists x_0\in R$，使得 $2^{x_0}=\frac{1}{2}$，则下列判断正确的是

A．$p\wedge q$ 是真命题　　B．$(\neg p)\wedge q$ 是真命题

C．$p\wedge(\neg q)$ 是真命题　　D．$(\neg p)\wedge(\neg q)$ 是真命题

4．设 $x\in R$，则"$|x-1|<3$"是"$x>-2$"的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知函数 $g(x)=a-\frac{2}{3^x+1}(a\in R)$ 是奇函数，则函数 $g(x)$ 的值域为

A．$(-1,1)$　　B．$(-1,+\infty)$　　C．$(-1,1]$　　D．$(-\infty,1)$

6．函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+2+a,x\le 1\\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1),x>1\end{cases}$ 有最大值，则实数 a 的范围是

A．$(-5,+\infty)$　　B．$[-5,+\infty)$　　C．$(-\infty,-5)$　　D．$(-\infty,-5]$

7．根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}，而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}，则下列各数中与 $\frac{M}{N}$ 最接近的是（参考数据：$\lg 3\approx 0.48$）

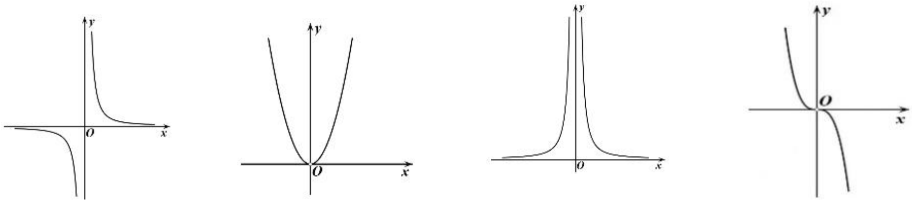
A．10^{33}　　B．10^{53}　　C．10^{73}　　D．10^{93}

8．已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上单调递增．设 $a=f(\log_4 5)$，

$b=f(\log_2\frac{1}{3})$，$c=f(0.2^{0.5})$，则 a,b,c 的大小关系为

A．$c<b<a$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$a<b<c$

9．函数 $f(x)=\dfrac{2^x+1}{x(2^x-1)}$ 的部分图象大致为



A．
B．
C．
D．

10．已知单调函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，对于定义域内任意 $x,f[f(x)-\log_2 x]=3$，则 $g(x)=f(x)+x-7$ 的零点所在的区间为

A．$(1,2)$　　B．$(2,3)$　　C．$(3,4)$　　D．$(4,5)$

11．已知函数 $f(x)=|\log_2 x|$，当 $0<m<n$ 时，$f(m)=f(n)$，若 $f(x)$ 在 $[m^2,n]$ 上的最大值为 2，则 $\dfrac{n}{m}$ 为

A．4　　B．3　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．2

12．已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，给出下列命题：

①当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$；② $f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$；

③函数 $f(x)$ 有 2 个零点；④ $\forall x_1,x_2\in R$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<2$.

其中正确的命题是

A．①③　　B．②③　　C．②④　　D．③④

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．函数 $f(x)=x^2+\ln x-2$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为_______

14．函数 $f(x)=a^{x-m}+n-3(a>0,a\neq1)$ 的图象恒过定点 $(3,2)$，则 $m+n=$______

15．已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 3 的奇函数，且 $f(-2)=2f(8)+1$，则 $f(3023)$ 的值为______

16．已知函数 $f(x)=x^2-2mx+e^{2x}-2me^x+2m^2$,若存在实数 x_0，使得 $f(x_0)\le\dfrac{1}{2}$ 成立，则实数 m 的值为______

三、解答题:本大题共 70 分

17．（本小题满分 12 分）

计算：(1) $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}}-5\times(0.2)^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{5}+2)^{-1}+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{0}$；

(2)$(2+\log_3\frac{32}{9})\times\log_2 3+2\ln\sqrt{e}+2^{1+\log_2 3}$．

18．（本小题满分 12 分）

已知幂函数 $f(x)=(m^2-2m+2)x^{5k-2k^2}$ $(k\in Z)$ 是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递增.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)若正数 a,b 满足 $2a+3b=7m$，求 $\frac{3}{a+1}+\frac{2}{b+1}$ 的最小值.

19．（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=x^2-4x+a+3, a\in R$．

(1)若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有零点，求 a 的取值范围；

(2)若函数 $f(x)$ 在 $[a,a+1]$ 上的最大值为 3，求 a 的值.

20．(本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=x^n\ln x$．

(1)令 $n=2$，求 $f(x)$ 的最值；

(2)令 $n=1$，证明：当 $x>1$ 时，$f(x)<\frac{1}{2}(x^2-1)$．

21．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2+e^x-ax(a\in R)$．

(1)当 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，求 a 的取值范围；

(2)若 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x_0)=-1$，求正数 a 的值.

选考题：共 10 分.请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时请用 $2B$ 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22．（本小题满分 10 分）**【选修 4-4：坐标系与参数方程】**

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t为参数)，以坐标原点 O 为极点，取相同的单位长度，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta + 1 = 0$.

(1)求直线 l 的普通方程，曲线 C 的直角坐标方程；

(2)设直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点，点 Q 在 C 上运动，求 ΔABQ 面积的最大值.

23．（本小题满分 10 分）**【选修 4-5：不等式选讲】**

已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+b| + c$，其中 a, b, c 为正实数.

(1) 当 $a = b = c = 2$ 时，求不等式 $f(x) < 10$ 的解集；

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 1，求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值.

2020—2021 学年第二学期高二期末考试数学答案（文科）

1~5. DBBAA　　6~10. BDBCC　　11~12. AC

13. $y=3x-4$　　14. 7　　15. $-\dfrac{1}{3}$　　16. $\dfrac{1}{2}$

17. 解：(1) $\dfrac{5}{4}$　　（2）12

18. 解：(1) 由题：$m^2-2m+2=1$，所以 $m=1$，又 $\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $5k-2k^2>0$，$\therefore 0<k<\dfrac{5}{2}(k\in Z)$，$\therefore k=1$ 或 2，又 $f(x)$ 为偶函数，$\therefore k=2$，即 $f(x)=x^2$.

(2) $\because 2a+3b=7$，$\therefore 2(a+1)+3(b+1)=12\Rightarrow \dfrac{a+1}{6}+\dfrac{b+1}{4}=1$，所以 $\dfrac{3}{a+1}+\dfrac{2}{b+1}=$ $(\dfrac{a+1}{6}+\dfrac{b+1}{4})(\dfrac{3}{a+1}+\dfrac{2}{b+1})$ $=1+\dfrac{a+1}{3(b+1)}+\dfrac{3(b+1)}{4(a+1)}\geq 1+2\sqrt{\dfrac{1}{4}}=2$，当且仅当 $\dfrac{a+1}{3(b+1)}=\dfrac{3(b+1)}{4(a+1)}$ 即 $2a=3b+1$，即 $a=2$，$b=1$ 时等号成立.所以所求最小值为 2..

19.解：(1) 实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$，

(2) $f(x)=(x-2)^2+a-1$，对称轴 $x=2$，

当 $\dfrac{a+a+1}{2}\leq 2$ 即 $a\leq\dfrac{3}{2}$ 时，最大值在 a 处取到，即：$f(a)=a^2-4a+a+3=3$，解得 $a=0$ 或 $a=3$(舍)；

当 $\dfrac{a+a+1}{2}>2$ 即 $a>\dfrac{3}{2}$ 时，最大值在 $a+1$ 处取到 ，即：

$f(a+1)=(a+1)^2-4(a+1)+a+3=3$，解得：$a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ 或 $a=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$（舍），

综上：$a=0$ 或 $a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

20.解：(1) 由题 $f(x)=x^2\ln x(x>0)$，$\therefore f'(x)=x(1+2\ln x)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，

当 $x\in(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$ 时，$f'(x)<0$，$x\in[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$ 单调递减，在区间 $[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$ 单调递增，函数 $f(x)$ 有极小值 $-\frac{1}{2e}$，无极大值；所以函数 $f(x)$ 有最小值 $-\frac{1}{2e}$，无最大值；

(2)当 $n=1$ 时，$f(x)=x\ln x$ ，要证 $f(x)<\frac{1}{2}(x^2-1)$，只需证 $x\ln x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2<0$ 成立，

令 $g(x)=x\ln x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2(x>1)$， $g'(x)=\ln x+1-x$， $g''(x)=\frac{1}{x}-1<0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减， $g'(x)<g'(1)=0$，

$\therefore$ $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore g(x)<g(1)=0$，$\therefore$ $f(x)<\frac{1}{2}(x^2-1)$.

21.解：(1)由题意知 $x>1$ 时， $f'(x)=e^x-a+2x\geq0$ 恒成立，即有 $a\leq e^x+2x$

可知 $y=e^x+2x$ 单调递增，因此有 $a\leq e+2$.

(2) $f'(x)=e^x+2x-a$，$f''(x)=e^x+2>0$，故 $f'(x)$ 单调递增，由题意知 $f'(x)$ 存在唯一零点 x_0，因此有 $f'(x_0)=e^{x_0}+2x_0-a=0$，所以 $a=e^{x_0}+2x_0$，

又因为 $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ax_0=-1$，得 $e^{x_0}+x_0^2-(e^{x_0}+2x_0)x_0=-1$，整理得：$(e^{x_0}+x_0+1)(1-x_0)=0$，

设 $g(x)=e^x+x+1$，则 $g(x)$ 单调递增，又 $g(-1)>0,g(-2)<0,$ 则 $\exists x_1\in(-2,-1)$，使得 $e^{x_1}+x_1+1=0$，此时 $a=e^{x_1}+2x_1<\frac{1}{e}-2<0$，不符合题意，舍；

当 $x_0=1$ 时， $a=e^{x_0}+2x_0=e+2$，符合题意. 综上：$a=e+2$.

22.解:(1)将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t为参数)，消去参数 t，得 $x-y+1=0$，

所以直线 l 的普通方程为 $x-y+1=0$.

将 $\rho^2=x^2+y^2, x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$，

得 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，所以曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

(2)由(1)可知直线 l：$x-y+1=0$，曲线 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，所以圆心 $C(1,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|1-1+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $|AB|=\sqrt{2}$. 设 AB 的中点为 D，则当曲线 C 上的点到直线 l 的距离最大，即当 Q 为过点 D 且与 AB 垂直的直线与 C 的交点时，$S_{\Delta ABQ}$ 最大，

此时 $(S_{\Delta ABQ})_{\max}=\dfrac{1}{2}|AB|(d+1)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

23. 解：(1)当 $a=b=c=2$ 时，$f(x)=|x-2|+|x+2|+2$，

当 $x\le -2$ 时，$f(x)<10$ 即 $2-2x<10$，解得 $x>-4$，所以 $-4<x\le -2$；

当 $-2<x<2$ 时，$f(x)<10$ 即 $6<10$，不等式恒成立，所以 $-2<x<2$；

当 $x\ge 2$ 时，$f(x)<10$ 即 $2x+2<10$，解得 $x<4$，所以 $2\le x<4$.

综上所述，不等式 $f(x)<10$ 的解集为 $\{x|-4<x<4\}$.

(2)因为 $a>0,b>0,c>0$，所以 $f(x)=|x-a|+|x+b|+c\ge|a-x+x+b|+c=a+b+c$.

因为 $f(x)$ 的最小值为1，所以 $a+b+c=1$，

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2cb=1$. 因为 $2ab\le a^2+b^2$，当且仅当 $a=b$ 等号成立；$2cb\le c^2+b^2$，当且仅当 $c=b$ 时等号成立；$2ac\le a^2+c^2$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立，所以 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2cb=1\le 3(a^2+b^2+c^2)$，

所以 $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}$，所以 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为 $\dfrac{1}{3}$，此时 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.