2018年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

参考答案及评分标准

说明：

1、评阅试卷时，请依据评分标准. 选择题和填空题只设5分和0分两档；其它各题的评阅，请严格按照评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其它中间档次.

2、如果考生的解答题方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评阅时可参考本评分标准适当划分档次评分，5分一个档次，不要再增加其它中间档次.

一、选择题（本大题共6个小题，每小题5分，共30分）

1、A　　2、B　　3、B　　4、D　　5、C　　6、D

二、填空题（本大题共6个小题，每小题5分，共30分）

7、4　　8、$\frac{2\sqrt{15}}{5}$　　9、1　　10、$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$　　11、1　　12、6050

三、解答题（本大题共4个小题，每小题20分，共80分）

13. 已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，设其实轴端点为$A_1$、$A_2$，点$P$是双曲线上不同于$A_1$、$A_2$的一个动点，直线$PA_1$、$PA_2$分别与直线$x=1$交于$M_1$、$M_2$两点.

证明：以线段M_1M_2为直径的圆必经过定点.

证明：由已知可设$A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$，双曲线上动点P的坐标为(x_0,y_0)且$y_0\neq0$，

则$\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{3}=1$.

因为直线PA_1的方程为$y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，直线PA_2的方程为$y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

所以$M_1(1,\frac{3y_0}{x_0+2})$，$M_2(1,\frac{-y_0}{x_0-2})$，　　……5分

设以线段M_1M_2为直径的圆C上任意一点$Q(x,y)$，

则由$\overrightarrow{M_1Q}\cdot\overrightarrow{M_2Q}=0$得圆$C$的方程为$(x-1)(x-1)+(y-\frac{3y_0}{x_0+2})(y-\frac{-y_0}{x_0-2})=0$. …10分

令$y=0$，代入上述圆方程，得$(x-1)^2-\frac{3y_0^2}{x_0^2-4}=0$，　　……15分

由$\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{3}=1$可得$\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=\frac{3}{4}$，

因此有$(x-1)^2-\frac{9}{4}=0$，解得$x=\frac{5}{2}$或$x=-\frac{1}{2}$.

所以，以线段M_1M_2为直径的圆必经过两定点$(-\frac{1}{2},0)$，$(\frac{5}{2},0)$. ……20 分

14. 设x，y，z为正实数，求$(x+\frac{1}{y}+\sqrt{2})(y+\frac{1}{z}+\sqrt{2})(z+\frac{1}{x}+\sqrt{2})$的最小值.

解：记$T=(x+\frac{1}{y}+\sqrt{2})(y+\frac{1}{z}+\sqrt{2})(z+\frac{1}{x}+\sqrt{2})$，

当$x=y=z=1$时，T有最小值$(2+\sqrt{2})^3=20+14\sqrt{2}$. ……5 分

下证：　$T\geq 20+14\sqrt{2}$.

解法一：$T=(xyz+\frac{1}{xyz})+\sqrt{2}(xy+yz+zx+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx})$

$+3(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+\sqrt{2}(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y})+5\sqrt{2}$ ……10 分

$\geq 2+\sqrt{2}\times 6\sqrt[6]{xy\cdot yz\cdot zx\cdot\frac{1}{xy}\cdot\frac{1}{yz}\cdot\frac{1}{zx}}$

$+3\times 6\sqrt[6]{x\cdot y\cdot z\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}+\sqrt{2}\times 3\sqrt[3]{\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}}+5\sqrt{2}$ ……15 分

$=2+6\sqrt{2}+3\times 6+\sqrt{2}\times 3+5\sqrt{2}=20+14\sqrt{2}$. ……20 分

当$x=y=z=1$时，可取到等号.

所以，T的最小值为$20+14\sqrt{2}$.

解法二：$T\geq(2\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{2})(2\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{2})(2\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{2})$ ……10 分

$=8+4\sqrt{2}(\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}})+4(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}})+2\sqrt{2}$

$\geq 8+4\sqrt{2}\times 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x}{z}}\cdot\sqrt{\frac{z}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}}+4\times 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot\sqrt{\frac{z}{x}}}+2\sqrt{2}$ ……15 分

$=8+4\sqrt{2}\times 3+4\times 3+2\sqrt{2}=20+14\sqrt{2}$. ……20 分

当$x=y=z=1$时，可取到等号.

所以，T的最小值为$20+14\sqrt{2}$.

解法三：注意到：$\dfrac{x+\frac{1}{y}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{y}+\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot 1$ ……10 分

$\geq x^{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\cdot(\frac{1}{y})^{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\cdot 1^{\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$. ……15 分

于是，$\dfrac{(x+\frac{1}{y}+\sqrt{2})(y+\frac{1}{z}+\sqrt{2})(z+\frac{1}{x}+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^3}$

$=\dfrac{x+\frac{1}{y}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y+\frac{1}{z}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{z+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$\geq(x^{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\cdot(\frac{1}{y})^{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\cdot 1^{\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}})\cdot(y^{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\cdot(\frac{1}{z})^{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\cdot 1^{\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}})\cdot(z^{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\cdot(\frac{1}{x})^{\frac{1}{2+\sqrt{2}}}\cdot 1^{\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}})$

$=1$.

故$(x+\frac{1}{y}+\sqrt{2})(y+\frac{1}{z}+\sqrt{2})(z+\frac{1}{x}+\sqrt{2})\geq(2+\sqrt{2})^3$. ……20 分

当$x=y=z=1$时，可取到等号.

所以，T的最小值为$(2+\sqrt{2})^3=20+14\sqrt{2}$.

15. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{8}a_n^2+m\ (n\in\mathbf{N}^*)$，若对任意正整数$n$，都有$a_n<4$，求实数$m$的最大值.

解：因为$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{8}a_n^2-a_n+m=\frac{1}{8}(a_n-4)^2+m-2\geq m-2$， ……5 分

故$a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\geq 1+(m-2)(n-1)$.

若$m>2$，注意到$n\to+\infty$时，$(m-2)(n-1)\to+\infty$，

因此，存在充分大的n，使得$1+(m-2)(n-1)>4$，即$a_n>4$，矛盾！

所以，$m \le 2$.　　　　……10 分

又当 $m=2$ 时，可证：对任意的正整数 n，都有 $0<a_n<4$.

当 $n=1$，$a_1=1<4$，结论成立；

假设 $n=k(k\ge 1)$ 时，结论成立，即 $0<a_k<4$，

则 $0<a_{k+1}=2+\frac{1}{8}a_k^2<2+\frac{1}{8}\times 4^2=4$，

即结论对 $n=k+1$ 也成立.

由归纳原理知，对任意的正整数 n，都有 $0<a_n<4$.

综上可知，所求实数 m 的最大值为 2.　　　　……20 分

16. 设函数 $f(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x$.

（1）若 $f(x)$ 在其定义域内为单调递增函数，求实数 p 的取值范围；

（2）设 $g(x)=\frac{2e}{x}$，且 $p>0$，若在 $[1,e]$ 上至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立，求实数 p 的取值范围；

（3）求证：对任意的正整数 n，都有 $\sum_{k=1}^{n}\ln^2(1+\frac{2}{k})<3$ 成立.

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>0\}$.

由 $f(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x$ 知 $f'(x)=p+\frac{p}{x^2}-\frac{2}{x}$，

要使 $f(x)$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数，只须 $f'(x)\ge 0$，

即 $px^2-2x+p\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 内恒成立.

于是 $p\ge\frac{2x}{x^2+1}$，注意到：$\frac{2x}{x^2+1}\le\frac{2x}{2x}=1$，等号在 $x=1$ 时成立，

即 $\frac{2x}{x^2+1}$ 在 $x=1$ 时有最大值 1.

从而 $p\ge 1$.　　　　……5 分

（2）解法一：注意到 $g(x)=\frac{2e}{x}$ 在 $[1,e]$ 上是减函数，

所以 $g(x)_{\min}=g(e)=2$，$g(x)_{\max}=g(1)=2e$，即 $g(x)\in[2,2e]$.

当 $0<p<1$ 时，由 $x\in[1,e]$，得 $x-\frac{1}{x}\geqslant 0$，

故 $f(x)=p(x-\frac{1}{x})-2\ln x<x-\frac{1}{x}-2\ln x<2$，不合题意.

当 $p\geqslant 1$ 时，由（1）知 $f(x)$在$[1,e]$上是增函数，$f(1)=0<2$，

又 $g(x)$在$[1,e]$上是减函数，所以原命题等价于 $f(x)_{\max}>g(x)_{\min}=2$，$x\in[1,e]$，

由 $f(x)_{\max}=f(e)=p(e-\frac{1}{e})-2\ln e>2$，解得 $p>\frac{4e}{e^2-1}$.

综上，p 的取值范围是$(\frac{4e}{e^2-1},+\infty)$. ……10 分

解法二：原命题等价于 $f(x)-g(x)>0$ 在$[1,e]$上有解，

设 $F(x)=f(x)-g(x)=px-\frac{p}{x}-2\ln x-\frac{2e}{x}$.

因为 $F'(x)=p+\frac{p}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{2e}{x^2}=\frac{px^2+p+2(e-x)}{x^2}>0$，

所以 $F(x)$是增函数，

所以 $F(x)_{\max}=F(e)>0$，解得 $p>\frac{4e}{e^2-1}$.

故 p 的取值范围是$(\frac{4e}{e^2-1},+\infty)$. ……10 分

（3）令 $g(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$，则由（1）知 $g(x)$ 在$(0,+\infty)$内为单调减函数.

由于 $g(1)=0$，故当 $x>1$时，有 $g(x)<0$，即 $0<2\ln x<x-\frac{1}{x}$.

因此，$2\ln\sqrt{1+\frac{2}{k}}<\sqrt{1+\frac{2}{k}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{k}}}=\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$，

即 $\ln(1+\frac{2}{k})<\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$ ……15 分

故 $\ln^2(1+\frac{2}{k})<\frac{4}{k(k+2)}$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2(1+\frac{2}{k})<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+2)}=2\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})$

$=2(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})<3$. ……20 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注