2022年普通高等学校招生全国统一考试数学(天津卷)2022.06.

一、选择题:本题共9小题,每小题5分,共45分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$,集合 $A=\{0,1,2\},B=\{-1,2\}$,则 $A\cap\bar{B}=($　　$)$

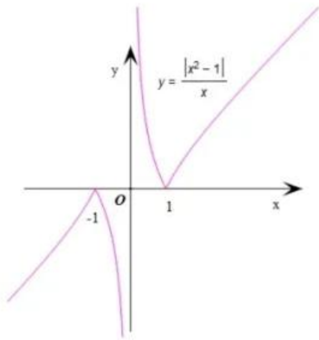
【答案】$A\cap\bar{B}=\{0,2\}$

“x 为整数”是“$2x+1$ 为整数”的(　)条件

A. 充分不必要 B. 必要而不充分 C. 分要 D. 既不充分也不必要

【答案】A

3. 函数 $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x}$ 的图像为(　)



4. ( )

5. $a=2^{0.7},b=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.7},c=\log_2^{\frac{1}{3}}$, 比较 a,b,c 的大小.( )

【答案】$a>b>c$

6. 化简 $(2\log_4^3+\log_8^3)(\log_3^2+\log_9^2)$ 的值为( )【答案】2

7. 抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x$,双曲线 $\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{b}=1$,抛物线的准线过双由线的左焦点,准线与

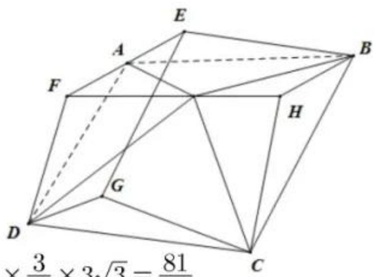
渐近线交于点 $A,\angle F_1F_2A=\frac{\pi}{4}$,求双曲线的标准方程( )

$A.\ \dfrac{x^2}{10}-y^2=1$　$B.\ x^2-\dfrac{y^2}{16}=1$　$C.x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　$D.\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

【答案】C

8. 如图是两个直三棱柱重叠后的景象,已知 $CH=BH=3,\angle CHB=12^0$,重叠后的底面

为正方形,该几何体的体积为( )



【答案】27

【解析】作 $HM\perp CB,CB=CH=3,\angle CHB=120^0$

$\Rightarrow CM=BM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2},HM=\dfrac{3}{2}$

重叠后的上底面与 FH 求交点为 I,

$V_{I-BCDA}=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{27}{2},V_{柱}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}\times3\sqrt{3}=\dfrac{81}{4}$

重叠后的几何体的体积为 $V_0=2V_{柱}-V_{I-BCDA}=2\times\dfrac{81}{4}-\dfrac{27}{2}=27$

9. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin2x$,关于该函数有下面四个说法:

①$f(x)$ 的最小正周期为 2π；②$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增；

③当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$；

④$f(x)$ 的图象可由 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到．

以上四个说法中，正确的个数有(　)

$A.1$　　$B.2$　　$C.3$　　$D.4$

【答案】A. ②正确，其它的都是错误的

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．试题中包含两个空的，答对1个的给3分，全部答对的给5分．

10．已知i是虚数单位，化简 $\frac{11-3i}{1+2i}$ 的结果为________

【答案】$1-5\mathrm{i}$

11.$\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x^2}\right)^5$ 展开式中的常数项为________

【答案】15

【解析】$T_{r+1}=C_5^r(\sqrt{x})^{5-r}3^r(x^{-2})^r\Rightarrow\frac{5}{2}-\frac{5}{2}r=0,r=1,a_2=C_5^1\times3=15$

直线 $x-y+m=0(m>0)$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 相交所得的弦长为 m，则 $m=$________

【答案】$m=2$

【解析】$\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2=3\Rightarrow m^2=4,m=2$

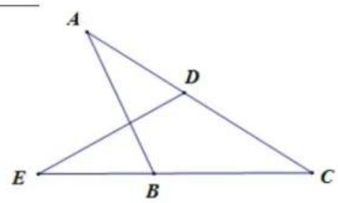
13. 52张扑克牌，没有大小王；无放回地抽取两次，则两次都抽到 A 的概率为________；已知第一次抽到的是 A，则第二次抽到 A 的概率为________

【答案】$\frac{1}{221},\frac{1}{17}$

【解析】$p(AB)=\frac{4}{52}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{221},p(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},p(B|A)=\frac{p(AB)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}}=\frac{1}{17}$

14.ΔABC 中，$\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=\vec{b}$,$D$ 是 AC 的中点；$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$；试用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$,；若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$，求 $\angle C$ 的最小值为________

【答案】$\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a},\frac{\pi}{6}$



【解析】方法一：

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}\Rightarrow(3\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$3\vec{b}^2+\vec{a}^2=4\vec{b}\cdot\vec{a}=4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle ACB\Rightarrow\cos\angle ACB=\dfrac{3\vec{b}^2+\vec{a}^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|}\geqslant\dfrac{2\sqrt{3}|\vec{a}||\vec{b}|}{4|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$

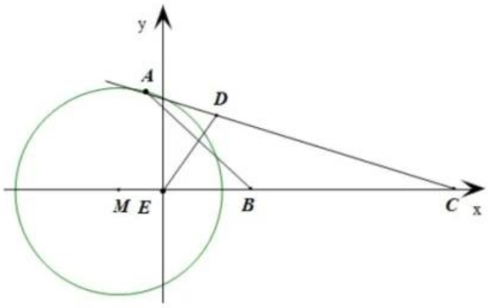
$\angle ACB\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$

方法二：如图所示，建立坐标系

$E(0,0),B(1,0),C(3,0),A(x,0)\overrightarrow{DE}=\left(\dfrac{x+3}{2},\dfrac{y}{2}\right),\overrightarrow{AB}=(1-x,y)$

$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\left(\dfrac{x+3}{2}\right)(1-x)+\dfrac{y^2}{2}=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=4$

A 的轨迹为以 $M(-1,0)$ 为圆心，以 $r=2$ 为半径的圆，当且仅当 CA 与圆 $\odot M$ 相切时，$\angle C$ 最大，此时 $\sin C=\dfrac{r}{CM}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2},\angle C=\dfrac{\pi}{6}$



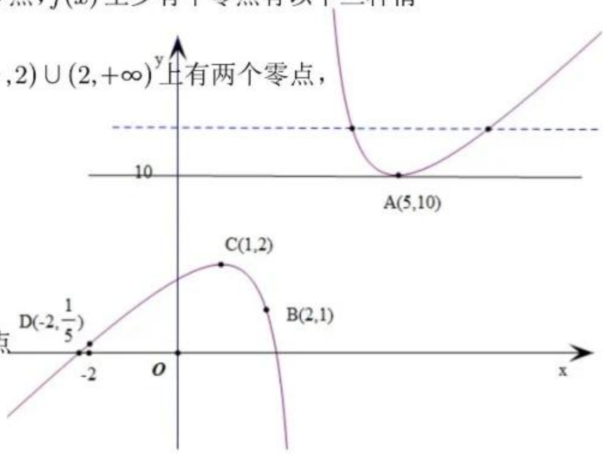
15．定义函数 $f(x)$ 代表 $|x|-2$ 与 $x^2-ax+3a-5$ 中较小的数，若 $f(x)$ 至少有 3 个零点，求 a 的取值范围__________

【答案】$a\in[10,+\infty)$

【解析】$f(x)=\min\{|x|-2,x^2-ax-3a-5\}$

设 $g(x)=x^2-ax-3a-5,g(x)$ 在 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ 上的零点才会成为 $f(x)$ 的零点，

±2 只有在 $g(\pm2)\geqslant0$ 时才会成为 $f(x)$ 的零点，$f(x)$ 至少有个零点有以下三种情况：



① $g(2)<0,g(-2)\geqslant0g(x)$ 且 $g(x)$ 在 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ 上有两个零点，

转化为 $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ 与 $y=a$ 的交点

$$\begin{cases}a-1<0\\5a-1\geqslant0\\a<\dfrac{1}{5}\text{ 或 }a>10\end{cases}\Rightarrow\text{此情况无解}$$

② $g(2)\geqslant0,g(-2)<0$

且 $g(x)$ 在 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ 上有两个零点

$\begin{cases}a-1\geqslant 0\\5a-1<0\\a<\frac{1}{5}\text{或}a>10\end{cases}\Rightarrow$ 此情况无解

③ $g(2)\geqslant 0, g(-2)\geqslant 0$ 且 $g(x)$ 在 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ 上至少有一个零点，

$\begin{cases}a-1\geqslant 0\\5a-1\geqslant 0\\a<1\text{或}a\geqslant 10\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 10$ 综上所述：a 的取值范围是 $a\in[10,+\infty)$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. ΔABC 中，$a=\sqrt{6}, b=2c, \cos C=-\frac{1}{4}$

(1) 求 c 的大小；(2) 求 $\sin B$ 的值；(3) 求 $\sin(2A-B)$ 的值

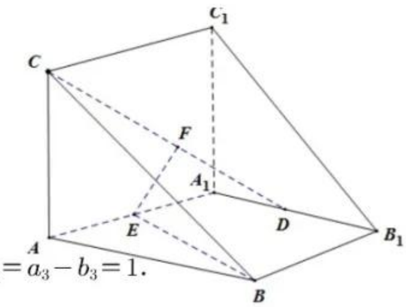
【答案】(1)$c=1$；(2)$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{4}$；(3) 求 $\sin(2A-B)=\frac{\sqrt{10}}{8}$

17. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AB=AC=2, AA_1\perp AB, D$ 为 AB_1 中点，E 为 AA_1 中点，F 为 CD 中点.

(1) 求证：$EF\mathbin{/\mkern-4mu/}ABC$ 平面；

(2) 求直线 BE 与平面 CC_1D 夹角的正弦值；

(3) 求平面 A_1CD 与平面 CC_1D 夹角的余弦值.



【答案】(1)$c=1$；(2)$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{4}$；(3)$\sin(2A-B)=\frac{\sqrt{10}}{8}$

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列；$\{b_n\}$ 是等比数列，$a_1=b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n$；

(3) 求 $\sum_{k=1}^{2n}(a_{n+1}-(-1)^ka_k)b_k$.

【答案】(1)$a_n=2n-1, a_n=2^{n-1}$；

(2) 见解析；(3)$\sum_{k=1}^{2n}(a_{n+1}-(-1)^ka_k)b_k=\frac{(3n-)4^{n+2}+16}{9}$

【解析】(1) 设 $\{a_n\}$ 公差为 d，$\{b_n\}$ 公比为 q，$a_n=1+(n-1)d, b_n=q^{n-1}$

由 $a_2-b_2=a_3-b_3=1$ 可得 $\begin{cases}1+d-q=1\\1+2d-q^2=1\end{cases}d=q=2(d=q=0$ 舍去）

$a_n=2n-1, b_n=2^{n-1}$

(2) 证明：（分析法）$b_{n+1}=2b_n\neq 0$,

$(S_{n+1}+a_{n+1})b_n=S_{n+1}b_{n+1}-S_nb_n\Leftrightarrow S_{n+1}+a_{n+1}=2S_{n+1}-S_n$

$\Leftrightarrow a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$（显然成立）

(3) $(a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1})b_{2k-1}+(a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k})b_{2k}$

$=(4k-1+4k-3)\times 2^{2k-1}+[4k+1-(4k-3)]\times 2^{2k}=k\times 4^{k+1}$

$$\sum_{k=1}^{2n}(a_{n+1}-(-1)^k a_k)b_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(a_{2k}-(-1)^{2k-1}a_{2k-1})b_{2k-1}+(a_{2k+1}-(-1)^{2k}a_{2k})b_{2k}\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k\times 4^k=S_n$$
$$S_n=1\times 4^2+2\times 4^3+3\times 4^4+\cdots+n\times 4^{n+1}$$
$$4S_n=0+1\times 4^3+2\times 4^4+3\times 4^5+\cdots+(n-1)\times 4^{n+2}$$
$$3S_n=4^2+4^3+4^4+\cdots+n\times 4^{n+2}=\frac{4^2(1-4^n)}{1-4}-n\times 4^{n+2}$$
$$S_n=\frac{(3n-1)4^{n+2}+16}{9}$$
$$\therefore\sum_{k=1}^{2n}(a_{n+1}-(-1)^k a_k)b_k=\frac{(3n-1)4^{n+2}+16}{9}$$

19．已知椭圆方程 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$，$F$ 为右焦点，A 为右顶点，B 为上顶点，$\frac{|BF|}{|AB|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 求椭圆的离心率 e；

(2) 已知直线 l 与椭圆有唯一交点 M，直线 l 交 y 轴于点 N，$|OM|=|ON|$，ΔOMN 的面积为 $\sqrt{3}$，求椭圆的标准方程．

【答案】(1)$\mathrm{e}=\frac{\sqrt{6}}{3}$；(2)$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

【解析】

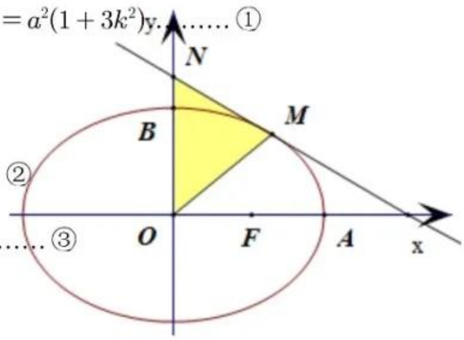
(1)$\frac{|BF|}{|AB|}=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 4a^2=3(b^2+a^2)\Rightarrow a^2=3b^2$

离心 $\mathrm{e}=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

由 (1) 可知椭图方程为 $x^2+3y^2=a^2$，设 $l: y=kx+m$

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+3y^2=a^2\end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2+6\mathrm{km}x+(3m^2-a^2)=0$

由 $\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)(3m^2-a^2)=0\Rightarrow 3m^2=a^2(1+3k^2)$......①



$x_m=\frac{-3\mathrm{km}}{1+3k^2}, y_m=\frac{m}{1+3k^2}$

由 $|OM|=|ON|$ 且 $S_{\Delta OMN}=\sqrt{3}$ 的面积为 $\sqrt{3}$

得 $|m|^2=\left(\frac{-3\mathrm{km}}{1+3k^2}\right)^2+\left(\frac{m}{1+3k^2}\right)^2$..................②

且 $\frac{1}{2}|m|\left|\frac{-3\mathrm{km}}{1+3k^2}\right|=\sqrt{3}$.......................................③

由②得 $k^2=\frac{1}{3}, k^2=\frac{1}{3}$，代入③得 $m^2=4$，

再由①得 $a^2=6,b^2=2$.

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

20.$f(x)=e^x-a\sin x,g(x)=b\sqrt{x}$

(1) 求函数 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点,

(i) 当 $a=0$ 时,求 b 的取值范围;(*ii*) 求证:$a^2+b^2>e$.

【答案】(1) 切线方程 $y=(1-a)x+1$;

(2) (i) $b\in[\sqrt{2e},+\infty)$ 的取值范围;(*ii*) 见解析

【解析】

(1)$f(0)=1,f'(x)=e^x-a\cos x,f'(0)=1-a$ 切线方程 $y=(1-a)x+1$;

(2) (i) 由题意得 $k(x)=e^x-b\sqrt{x}$ 有解,$k'(x)=e^x-\frac{b}{2\sqrt{x}},b>0$

且 $\frac{2}{b^2}=\frac{x}{e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解,设 $h(x)=\frac{x}{e^x}-m,m=\frac{2}{b^2}>0$,

则 $h'(x)=(1-x)e^{-x}$,当 $0<x<1$ 时,$h'(x)>0,h(x)=\frac{x}{e^x}-m$ 单调递增;当 $x>1$ 时 $h'(x)<0$,$h(x)=\frac{x}{e^x}-m$

单调递减,要使得 $h(x)=\frac{x}{e^x}-m$ 有零点,必须满足 $h(x)_{\max}=\frac{1}{e}-m\geqslant0$

即 $m\leqslant\frac{1}{e}$;

另一方面,当 $0<m\leqslant\frac{1}{e}$ 时,$h(0)=-m<0,h(1)=\frac{1}{e}-m\geqslant0,h(x)$ 在 $(0,1]$ 上存在实数解,$0<m\leqslant\frac{1}{e}$ 符合题意;$\therefore 0<\frac{2}{b^2}\leqslant\frac{1}{e}\ \therefore b\geqslant\sqrt{2e}$

实数 b 的取值范围是:$b\in[\sqrt{2e},+\infty)$

(*ii*)【解法1】柯西不等式:令交点横坐标为 x_0,则 $e^{x_0}=a\sin x_0+b\sqrt{x_0}$,

由柯西不等式:$e^{2x_0}=(a\sin x_0+b\sqrt{x_0})^2\leqslant(a^2+b^2)(\sin^2x_0+x_0)$

即证:$\frac{e^{2x_0}}{\sin^2x_0+x_0}>e$

因为:$\frac{e^{2x_0}}{\sin^2x_0+x_0}>\frac{e^{2x_0}}{x_0^2+x_0}=\frac{e^{x_0}\times e^{x_0}}{x_0^2+x_0}\geqslant\frac{ex_0(1+x_0)}{x_0(1+x_0)}=e$

. 原命题得证 .

【解法2】基本不等式令交点横坐标为 x_0,则 $e^{x_0}=a\sin x_0+b\sqrt{x_0}$,

则由基本不等式 $e^{2x_0}=(a\sin x_0+b\sqrt{x_0})^2\leqslant2(a^2\sin^2x_0+b^2x_0)$,

因此有：$a^2+b^2>a^2\dfrac{\sin^2x_0}{x_0}+b^2\dfrac{e^{2x_0}}{2x_0}\geqslant\dfrac{e^{2x_0}}{2x_0}\geqslant e$ 原命题得证 .

【解法3】线性规划法，

假设 $a^2+b^2\leqslant e$，下证明：$e^x>|a|x+|a|\sqrt{x}\geqslant a\sin x+b\sqrt{x}$

令 $t=\sqrt{x}$，欲证上述不等式，即证明：$\dfrac{e^{t^2}}{t}>|a|t+|b|$

令 $h(t)=\dfrac{e^{t^2}}{t}(t>0)$，先研究 $h(x)$ 的单调性和凹凸性：$h'(x)=\dfrac{(2t^2-1)e^{t^2}}{t^2}$

当 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $h(x)$ 取最小值 $\sqrt{2e}$，且 $h(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 递减，

在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 递增，

$h''(t)=\left[\dfrac{(2t^2+1)e^{t^2}}{t^2}-\dfrac{(2t^2-1)e^{t^2}}{t^4}\right]\times 2t=\dfrac{(2t^4+3t^2+11)e^{t^2}}{t^4}\times 2t>0$；

$h(t)$ 是定义域内的凹函数 .，注意到 $h'(1)=e$ 且 $h(1)=e$ ，

综合以上信息可知 $y=\sqrt{2e}$ 和 $y=et$ 为曲线 $y=h(t)$ 的两条切线 .

又根据 $h(t)$ 的凹凸性可知 $h(t)>et$ 欲证明 $\dfrac{e^{t^2}}{t}>|a|t+|b|$ 成立，

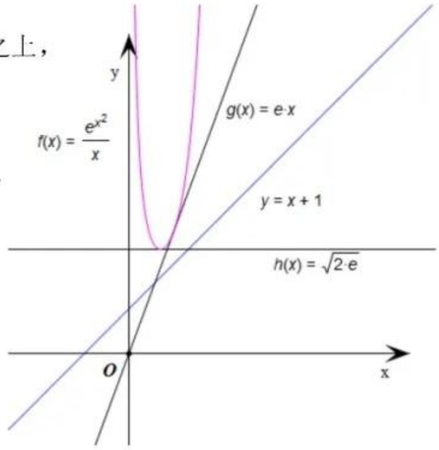
只需证明：$y=|a|t+|b|$ 直线在两条切线和 y 轴围成的区域（包含函数图像）下方，$a,b\in[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$，

只需两条切线的交点 $\left(\sqrt{\dfrac{2}{e}},\sqrt{2e}\right)$ 以及 $(0,\sqrt{2e})$ 在直线之上，

分别代 $t=0,t=\sqrt{\dfrac{2}{e}}$ 得到不等式：$y=|b|\leqslant\sqrt{e}<2\sqrt{e}$

$y=|a|\times\sqrt{\dfrac{2}{e}}+|b|<|a|+|b|\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}\leqslant 2\sqrt{e}$ 成立，

原命题得证 .



名校综合评价介绍

名校综合评价致力于提供综合评价、三位一体、新高考生涯规划、志愿填报等政策资讯服务。总部坐落于北京，用户群体涵盖全国 80%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取高中升学报考相关资讯及备考指南，请关注**名校综合评价**官方微信号：**mxzhpj**。