九江市2023年第一次高考模拟统一考试

数 学 试 题（文科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.全卷满分150分，考试时间120分钟.

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名等内容填写在答题卡上.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，第Ⅱ卷用黑色签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效.

第Ⅰ卷（选择题60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$M=\{x\in\mathbf{N}|x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$N=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，则$M\cap N=$（A）

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$

解：$\because M=\{x\in\mathbf{N}|-1\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$，$\therefore M\cap N=\{0,1,2,3\}$，故选A.

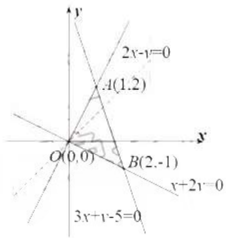
2. 复数z满足$(1-\mathrm{i})z=2+4\mathrm{i}$，则$z$的虚部为（A）

A. 3　　B. -3　　C. 1　　D. -1

解：$z=\dfrac{2+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{-2+6\mathrm{i}}{2}=-1+3\mathrm{i}$，虚部为3，故选A.

3. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}2x-y\geqslant 0\\ x+2y\geqslant 0\\ 3x+y-5\leqslant 0\end{cases}$，则$z=x-y$的最大值为(D)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 3



解：由约束条件作出可行域，如图中阴影部分所示. 易知目标函数$z=x-y$的最大值在$B(2,-1)$处取得，$z_{\max}=3$. 故选D.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_4=8$，$S_7=35$，则$a_5=$（C）

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

解：依题意得$\begin{cases}4a_1+6d=8\\ 7a_1+21d=35\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=-1\\ d=2\end{cases}$，$\therefore a_5=a_1+4d=7$，故选C.

5. 为了学习、宣传和践行党的二十大精神，某班组织全班学生开展了以“学党史、知国情、圆梦想”为主题的党史暨时政知识竞赛活动. 已知该班男生20人，女生30人，根据统计分析，男生组成绩和女生组成绩的平均分分别为80,84，则该班成绩的平均分是（D）

A. 82　　B. 82.1　　C. 82.2　　D. 82.4

解：该班成绩的平均分是$\dfrac{80\times 20+84\times 30}{50}=82.4$，故选D.

6. 在几何学中，单叶双曲面是通过围绕其主轴旋转双曲线而产生的表面. 由于有良好的稳定性和漂亮的外

观，单叶双曲面常常应用于一些大型的建筑结构，如发电厂的冷却塔. 已知某发电厂的冷却塔的立体图如图所示，塔的总高度为 150m，塔顶直径为 80m，塔的最小直径（喉部直径）为 60 m，喉部标高（标高是地面或建筑物上的一点和作为基准的水平面之间的垂直距离）为 110 m，则该双曲线的离心率约为（精确到 0.01）(B)

A. 2.14　　B. 1.81

C. 1.73　　D. 1.41

解：设双曲线标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），依题意知 $a=30$，

点 $(40,40)$ 在该双曲线上，$\dfrac{40^2}{30^2}-\dfrac{40^2}{b^2}=1$，$\therefore b^2=\dfrac{9\times40^2}{7}$，$\therefore c^2=a^2+b^2=30^2+\dfrac{9\times40^2}{7}=\dfrac{100\times207}{7}$，

$\therefore e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{23}{7}\in(3,4)$，$\therefore e\in(\sqrt{3},2)$，故选 B.

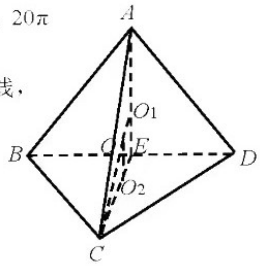
7. 已知 $\sin\alpha=2\sin(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)$，则 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=$ (C)

A. -3　　B. 3　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

解：$\because\sin\alpha=2\sin(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)$，$\therefore\sin\alpha=-2\cos\alpha$，即 $\tan\alpha=-2$，$\therefore\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-\dfrac{1}{3}$. 故选 C.

8. 三棱锥 $A-BCD$ 中，$\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 均为边长为 2 的等边三角形，若平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，则该三棱锥外接球的表面积为（B）

A. $\dfrac{8\pi}{3}$　　B. $\dfrac{20\pi}{3}$　　C. 8π　　D. 20π



解：分别过 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 外接圆圆心 O_1,O_2 作平面 ABD 与平面 BCD 的垂线，交于点 O，O 即为球心. 易得 $CO_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$OO_2=O_1E=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore R^2=CO_2^{\ 2}+OO_2^{\ 2}=\dfrac{5}{3}$，$\therefore S=4\pi R^2=\dfrac{20\pi}{3}$. 故选 B.

9. 已知 $a=\cos\dfrac{\pi}{5}$，$5^b=2$，$a^b=c$，则 a,b,c 的大小关系是 (B)

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

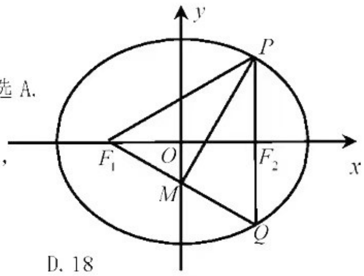
解：$\because\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}<a=\cos\dfrac{\pi}{5}<1$，$b=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$，由指数函数 $y=a^x$ 单调递减，可知 $c=a^b>a$，

$\therefore b<a<c$，故选 B.

10. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 的直线交 C 于 P,Q 两点，直线 F_1Q 交 y 轴于点 M，若 $PM\perp F_1Q$，$|PF_1|=|PQ|=2$，则椭圆 C 的焦距为（A）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解：如图，$\because PM\perp F_1Q$，$|PF_1|=|PQ|$，$\therefore M$ 为 F_1Q 的中点，又 $\because O$ 为 F_1F_2 的中点，$OM\perp x$ 轴，$\therefore PQ\perp x$



轴，$\therefore\triangle PF_1Q$ 为等边三角形，$\therefore\angle PF_1F_2=30^\circ$，$\therefore|PF_1|=\frac{4c}{\sqrt{3}}=2$，$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 A.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(2x+1)$ 为偶函数，且 $f(x)+f(4-x)=2$，$f(1)=2$，则 $\sum\limits_{n=1}^{22}f(n)=$ (A)

A. 23　　B. 22　　C. 19　　D. 18

解：由 $f(x)+f(4-x)=2$，令 $x=2$，得 $f(2)=1$. 令 $x=1$，得 $f(1)+f(3)=2$，$\because f(1)=2$，$\therefore f(3)=0$.
$\because f(2x+1)$ 为偶函数，$\therefore f(2x+1)=f(-2x+1)$，即 $f(1+x)=f(1-x)$，$\therefore$ 曲线 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称. 又 $\because f(x)+f(4-x)=2$，$\therefore$ 曲线 $f(x)$ 关于点 $(2,1)$ 中心对称，$\therefore f(x)$ 的周期 $T=4\times(2-1)=4$.
$\therefore f(4)=f(0)=f(2)=1$，$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{22}f(n)=5\times4+f(1)+f(2)=23$. 故选 A.

12. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx-b+\frac{4}{3}$（$a,b\in\mathrm{R}$），点 $P(1,0)$ 位于曲线 $y=f(x)$ 的下方，且过点 P 可以作 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则 a 的取值范围是 (D)

A. $(-\frac{5}{3},+\infty)$　　B. $(-\frac{5}{3},1)$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

解：$f'(x)=x^2+2ax+b$，设切点为 $(x_0,f(x_0))$，切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，由于切线过点 $P(1,0)$，
$\therefore -f(x_0)=f'(x_0)(1-x_0)$，整理得 $\frac{2}{3}x_0^3+(a-1)x_0^2-2ax_0-\frac{4}{3}=0$. 构造函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3+(a-1)x^2-2ax-\frac{4}{3}$，
$\therefore y=g(x)$ 有三个不同的零点，$g'(x)=2x^2+2(a-1)x-2a=2(x-1)(x+a)$，易知 $a\neq-1$，$g(1)\cdot g(-a)<0$，
即 $(-\frac{5}{3}-a)(\frac{1}{3}a^3+a^2-\frac{4}{3})<0$，即 $(a+\frac{5}{3})(a-1)(a+2)^2>0$，又因为点 $P(1,0)$ 在曲线下方，$f(1)>0$，即 $a>-\frac{5}{3}$，
$a>1$，故选 D.

第 II 卷（非选择题 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22-23 题为选考题，学生根据要求作答.

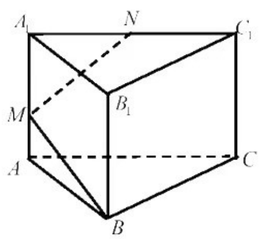
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $x=\underline{-4}$.

解：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1-x,1)$，$\because\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，$\therefore 1+x+3=0$，解得 $x=-4$.

14. 2022 年 11 月第十四届中国国际航空航天博览会在珠海举办. 在此次航展上，国产大飞机"三兄弟"运油-20、C919、AG600M 震撼亮相，先后进行飞行表演. 大飞机是大国的象征、强国的标志. 国产大飞机"三兄弟"比翼齐飞的梦想，在航空人的接续奋斗中成为现实. 甲乙两位同学参观航展后各自从"三兄弟"模型中购买一架，则两位同学购买的飞机模型不同的概率是 $\underline{\frac{2}{3}}$.

解：设三架飞机模型分别为 A, B, C. 甲乙各购买一架的可能情况有 9 种：AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC，其中两位同学购买的飞机模型不同有 6 种情况：AB, AC, BA, BC, CA, CB，所以两位同学购买的飞机模型不同的概率是 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.



15. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2AA_1=2$，N 为 A_1C_1 的中点，M 为线段 AA_1 上的点. 则 $|MN|+|MB|$ 的最小值为 $\underline{\sqrt{10}}$.

解：将矩形 ABB_1A_1 沿 AB 翻折，使得 A,A_1,B,B_1,C,C_1 六点共面，连接 BN 交 AA_1 于 M，则此时 $|MN|+|MB|$ 的值最小为 $|BN|=\sqrt{10}$.

16. $\triangle ABC$ 中，三内角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c，已知 $3\sin A=2\sin B\cos C$，$a=1$，则角 A 的最大值是 $\underline{\dfrac{\pi}{6}}$.

解法一：$\because 3\sin A=2\sin B\cos C$，由正弦定理得 $3a=2b\cos C$，由余弦定理得 $b^2-c^2=2a^2$.

而 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，消去 a^2 可得 $\cos A=\dfrac{\frac{1}{2}b^2+\frac{3}{2}c^2}{2bc}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{b}{c}+\dfrac{3c}{b})\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $b=\sqrt{3}c$ 时取等号.

$\because y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，$\therefore A_{\max}=\dfrac{\pi}{6}$.

解法二：$\because \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，又 $3\sin A=2\sin B\cos C$，$\therefore \cos C>0$，C 为锐角，且 $\sin B\cos C+3\cos B\sin C=0$，即 $\tan B=-3\tan C$，$\therefore B$ 为钝角，A 为锐角，

而 $\tan A=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\dfrac{2\tan C}{1+3\tan^2 C}=\dfrac{2}{\frac{1}{\tan C}+3\tan C}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

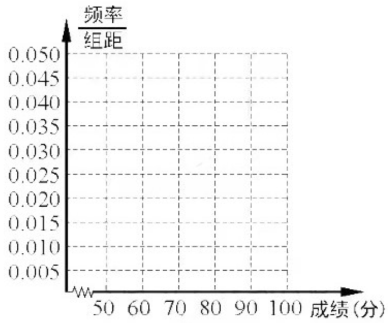
$\because y=\tan x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，$\therefore A_{\max}=\dfrac{\pi}{6}$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

某 IT 公司在 A，B 两地区各开设了一家分公司，为了解两家分公司员工的业务水平，对员工们进行了业务水平测试，满分为 100 分，80 分及以上为优秀. A 地区分公司的测试成绩分布情况如下：

成绩	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
频数	5	20	50	20	5



A 地区分公司

（1）完成 A 地区分公司的频率分布直方图，并求出该公司员工测试成绩的中位数；

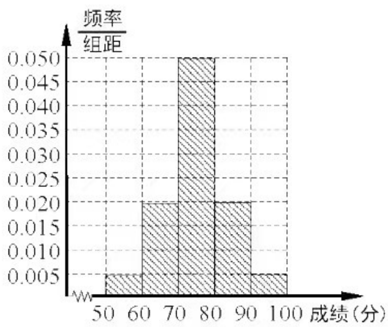
（2）补充完成下列 2×2 列联表，并判断是否有 97.5% 的把握认为两家分公司员工业务水平有差异.

	优秀	不优秀	合计
A 地区分公司			
B 地区分公司	40	60	
合计			

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

解：（1）A 地区分公司的频率分布直方图如右：………3 分



A 地区公司

由图知 A 地区分公司员工成绩在[50，70)的频率为 $(0.005+0.02)\times10=0.25$ ………4 分

设该公司员工成绩的中位数为 x，

则 $(x-70)\times0.05+0.25=0.5$ ………5 分

解得 $x=75$ ………6 分

（2）补充完成 2×2 列联表如下：

	优秀	不优秀	合计
A 地区分公司	25	75	100
B 地区分公司	40	60	100
合计	65	135	200

………8 分

$\chi^2=\dfrac{200\times(25\times60-75\times40)^2}{100\times100\times65\times135}=\dfrac{200}{39}\approx5.128>5.024$………10 分

故有97.5%的把握认为这两家分公司员工业务水平有差异………12 分

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_n>0$，$S_n=\dfrac{(a_n+2)a_n}{4}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项积$T_n=2^{n^2}$.

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和.

解：(1) 当$n=1$时，$a_1=\dfrac{(a_1+2)a_1}{4}$，$\therefore a_1=2$………1 分

当$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(a_n+2)a_n}{4}-\dfrac{(a_{n-1}+2)a_{n-1}}{4}$，

化简得$a_n{}^2-a_{n-1}{}^2=2(a_n+a_{n-1})$………2 分

$\because a_n>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=2$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为 2，公差为 2 的等差数列，

$\therefore a_n=2+(n-1)\times2=2n$………3 分

当$n=1$时，$b_1=T_1=2$………4 分

当$n\geq2$时，$b_n=\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=\dfrac{2^{n^2}}{2^{(n-1)^2}}=2^{2n-1}$………5 分

综上$b_n=2^{2n-1}$………6 分

(2) $a_nb_n=2n\cdot2^{2n-1}=n\cdot4^n$，

设$R_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\cdot4^1+2\cdot4^2+\cdots+n\cdot4^n$ ①

则$4R_n=1\cdot4^2+2\cdot4^3+\cdots+n\cdot4^{n+1}$ ②………8 分

①-②得$-3R_n=4^1+4^2+\cdots+4^n-n\cdot4^{n+1}=\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot4^{n+1}$………9 分

$=\dfrac{1-3n}{3}\cdot4^{n+1}-\dfrac{4}{3}$………11 分

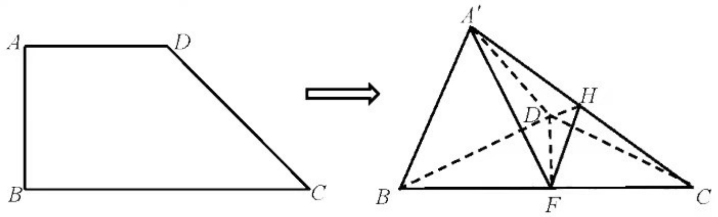
$\therefore R_n=\frac{3n-1}{9}\cdot 4^{n+1}+\frac{4}{9}$ ………12 分

19.(本小题满分 12 分)

如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，将 ΔABD 沿 BD 翻折至 $\Delta A'BD$ 的位置，使得 $A'B\perp A'C$.

(1)求证：平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD；

(2)若 F，H 分别为 BC，$A'C$ 的中点，求三棱锥 $A'-DFH$ 的体积.



解:(1) $\because A'B\perp A'C$，$A'B\perp A'D$，$A'C\cap A'D=A'$，$A'C,A'D\subsetneqq$ 平面 $A'CD$，

$\therefore A'B\perp$ 平面 $A'CD$ ………1 分

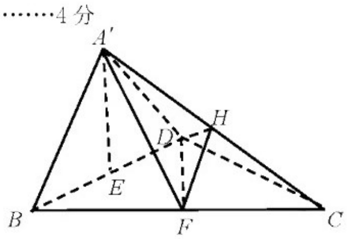
又 $CD\subsetneqq$ 平面 $A'CD$，$\therefore CD\perp A'B$ ………2 分

由直角梯形 $ABCD$，$AD // BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，得 $CD\perp BD$

………3 分

又 $A'B\cap BD=B$，$A'B,BD\subsetneqq$ 平面 $A'BD$，$\therefore CD\perp$ 平面 $A'BD$ ………4 分

又 $CD\subsetneqq$ 平面 BCD，$\therefore$ 平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD ………5 分



(2)取 BD 的中点 E，连接 $A'E$，

$\because A'B=A'D$，$\therefore A'E\perp BD$，又平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，

$\therefore A'E\perp$ 平面 BCD ………6 分

直角梯形 $ABCD$ 中，$\because AD // BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，

$\therefore BD=CD=2$，$A'E=1$ ………7 分

$\therefore V_{A'-BCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BDC}\cdot A'E=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 1=\frac{2}{3}$ ………9 分

$V_{A'-BFD}=\frac{1}{2}V_{A'-BCD}=\frac{1}{3}$ ………10 分

$V_{H-CFD}=\frac{1}{4}V_{A'-BCD}=\frac{1}{6}$ ………11 分

$\therefore V_{A'-DFH}=V_{A'-BCD}-V_{A'-BFD}-V_{H-CFD}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$，

即三棱锥 $A'-DFH$ 的体积为 $\frac{1}{6}$ ………12 分

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+x+\ln a$（$a>0$）.

(1) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的最大值；

(2) 若 $\forall x\in[1,+\infty)$， $f(x)\le 0$，求 a 的取值范围.

解：(1) 当 $a=1$ 时， $f(x)=\ln x-x^2+x$， $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+1=-\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$ ………1 分

当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$ ………2 分

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减………3 分

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=0$ ………4 分

(2) $\because f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+1$，易知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减………5 分

①由 (1) 知，当 $a=1$ 时， $f(x)\le 0$，符合题意………6 分

②当 $0<a<1$ 时， $f'(1)=2(1-a)>0$， $f'(\dfrac{1}{a})=a-1<0$，

$\therefore$ 存在 $x_1\in(1,\dfrac{1}{a})$，使得 $f'(x_1)=0$ ………7 分

故当 $x\in(x_1,\dfrac{1}{a})$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，$\therefore f(x)>f(\dfrac{1}{a})=\ln\dfrac{1}{a}-a\cdot(\dfrac{1}{a})^2+\dfrac{1}{a}+\ln a=0$，不符题意，舍去………8 分

③解法一：当 $a>1$ 时， $f'(1)=2(1-a)<0$， $f'(\dfrac{1}{a})=a-1>0$，

$\therefore$ 存在 $x_2\in(\dfrac{1}{a},1)$，使得 $f'(x_2)=0$ ………9 分

故当 $x\in[1,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减， $f(x)\le f(1)=\ln a-a+1$ ………10 分

令 $g(a)=\ln a-a+1$（$a>1$），则 $g'(a)=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}<0$，故 $g(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(a)<g(1)=0$， $f(x)<0$，符合题意………11 分

综上所述， a 的取值范围是 $[1,+\infty)$ ………12 分

解法二：当 $a\ge 1$ 时， $f'(x)=\dfrac{-2ax^2+x+1}{x}\le\dfrac{-2x^2+x+1}{x}=\dfrac{(1-x)(2x+1)}{x}$ ………9 分

$\because x\in[1,+\infty)$， $\therefore f'(x)\le\dfrac{(1-x)(2x+1)}{x}\le 0$，

故当 $x\in[1,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减， $f(x)\le f(1)=\ln a-a+1$ ………10 分

令 $g(a)=\ln a-a+1$（$a\ge 1$），则 $g'(a)=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}\le 0$，故 $g(a)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(a) \le g(1) = 0$，$f(x) \le 0$，符合题意………11 分

综上所述，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$ ………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知过点 $P(2,0)$ 的直线 l 与抛物线 $E: y^2 = 2px$（$p>0$）交于 A,B 两点，过线段 AB 的中点 M 作直线 $MN \perp y$ 轴，垂足为 N，且 $PM \perp PN$.

(1) 求抛物线 E 的方程；

(2) 若 C 为 E 上异于点 A,B 的任意一点，且直线 AC,BC 与直线 $x=-2$ 交于点 D,R，证明：以 DR 为直径的圆过定点.

解：(1) 由题意，可设直线 l 的方程为 $x = my+2$.

将 $x=my+2$ 代入 $y^2=2px$，消去 x 得 $y^2-2pmy-4p=0$ ………1 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-4p$ ………2 分

$\because M$ 是线段 AB 的中点，$\therefore x_M = \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{m(y_1+y_2)+4}{2} = pm^2+2$，$y_M = \dfrac{y_1+y_2}{2} = pm$，

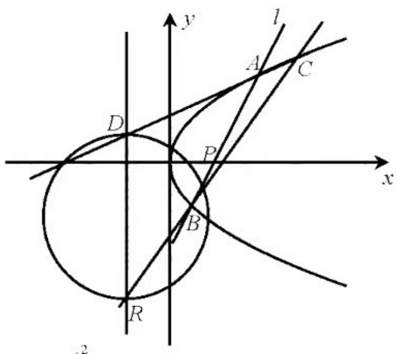
即 $M(pm^2+2, pm)$，又 $MN \perp y$ 轴，$\therefore$ 垂足 N 的坐标为 $N(0,pm)$ ………3 分

则 $\overrightarrow{PM} = (pm^2, pm)$，$\overrightarrow{PN} = (-2, pm)$，

$\because PM \perp PN$，$\therefore \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN} = -2pm^2+p^2m^2 = 0$ 对任意的 $m \in \mathrm{R}$ 恒成立………4 分

$\therefore -2p+p^2=0$，解得 $p=2$，

故抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$ ………5 分



(2) 设 $C(\dfrac{t^2}{4}, t)$，由 (1) 可知，$A(\dfrac{y_1^2}{4}, y_1)$，$B(\dfrac{y_2^2}{4}, y_2)$，

$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$ ………6 分

则 $k_{AC} = \dfrac{y_1-t}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{t^2}{4}} = \dfrac{4}{y_1+t}$，直线 AC 的方程为 $y-t = \dfrac{4}{y_1+t}(x-\dfrac{t^2}{4})$ ………7 分

令 $x=-2$，则 $y = t+\dfrac{4}{y_1+t}(-2-\dfrac{t^2}{4}) = \dfrac{ty_1-8}{y_1+t}$，$\therefore D(-2, \dfrac{ty_1-8}{y_1+t})$，同理 $R(-2, \dfrac{ty_2-8}{y_2+t})$ ………9 分

由抛物线的对称性可知，若以线段 DR 为直径的圆过定点，则定点必在 x 轴上，设该点坐标为 $T(a,0)$，

则 $\overrightarrow{DT}=(a+2,-\dfrac{ty_1-8}{y_1+t})$，$\overrightarrow{RT}=(a+2,-\dfrac{ty_2-8}{y_2+t})$，且 $\overrightarrow{DT}\cdot\overrightarrow{RT}=0$，

$\therefore (a+2)^2+\dfrac{ty_1-8}{y_1+t}\cdot\dfrac{ty_2-8}{y_2+t}=0$ ………10 分

$\therefore (a+2)^2=-\dfrac{ty_1-8}{y_1+t}\cdot\dfrac{ty_2-8}{y_2+t}=-\dfrac{t^2y_1y_2-8t(y_1+y_2)+64}{y_1y_2+t(y_1+y_2)+t^2}=-\dfrac{-8t^2-32mt+64}{t^2+4mt-8}=8$，

$\therefore a=2\sqrt{2}-2$ 或 $a=-2\sqrt{2}-2$ ………11 分

$\therefore$ 以线段 DR 为直径的圆过定点 $(2\sqrt{2}-2,0)$ 和 $(-2\sqrt{2}-2,0)$ ………12 分

请考生在第 22-23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta-\alpha)=\cos\alpha$（$\alpha$ 为直线 l 的倾斜角）.

（1）求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的普通方程；

（2）设 $P(0,1)$，直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，求 $\dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}$ 的最大值.

解：（1）由 $\rho\sin(\theta-\alpha)=\cos\alpha$，得 $\rho(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)=\cos\alpha$ ………1 分

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，得直线 l 的直角坐标方程为 $x\sin\alpha-y\cos\alpha+\cos\alpha=0$ ………2 分

由 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数），两式相除得 $t=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$ ………3 分

$\therefore x=\dfrac{2}{1+(\dfrac{y}{x})^2}$，整理得曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$（$x\neq 0$）………4 分

（2）解法一：直线 l 经过点 $P(0,1)$，$\therefore l$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），

代入 $(x-1)^2+y^2=1$ 中，得 $t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t+1=0$ ………5 分

由 $\Delta=4(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-4>0$，得 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ ………6 分

$\therefore t_1+t_2=2(\cos\alpha-\sin\alpha)$，$t_1t_2=1$ ………7 分

$\therefore \dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{t_1t_2}=\sqrt{-4\sin 2\alpha}$ ………8 分

$\because \alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\therefore 2\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\therefore -1\le\sin 2\alpha<0$，$\therefore \dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}\le 2$，

当且仅当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，等号成立………9 分

故$\dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}$的最大值为2………10分

解法二：直线l经过点$P(0,1)$，$|PO|=1$………5分

由切割线定理得$|PA|\cdot|PB|=|PO|^2=1$………7分

$\therefore\dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}=|AB|\le 2$，当且仅当$AB$为圆$C$的直径时，等号成立………9分

故$\dfrac{|AB|}{|PA|\cdot|PB|}$的最大值为2………10分

23.（本小题满分10分）选修4—5：不等式选讲

已知a,b,c均为正实数，且$a^2+b^2+c^2=2$.

(1)求$a+b+c$的最大值；

(2)求$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$的最小值.

解：(1)$\because(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$，

又$2ab\leqslant a^2+b^2$，$2bc\leqslant b^2+c^2$，$2ca\leqslant c^2+a^2$………1分

$\therefore(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)=6$………2分

$\therefore a+b+c\leqslant\sqrt{6}$，当且仅当$a=b=c=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$时，等式成立………3分

即$a+b+c$的最大值为$\sqrt{6}$………4分

(2)令$m=a+b$，$n=b+c$，$p=c+a$，则$(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})(m+n+p)=3+\dfrac{n}{m}+\dfrac{p}{m}+\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{n}+\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}$

………5分

$\because\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\geqslant 2$，$\dfrac{p}{m}+\dfrac{m}{p}\geqslant 2$，$\dfrac{p}{n}+\dfrac{n}{p}\geqslant 2$，$\therefore(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})(m+n+p)\geqslant 9$，

当且仅当$m=n=p$，即$a=b=c$时，等式成立………6分

由(1)知$m+n+p=2(a+b+c)\leqslant 2\sqrt{6}$，$\therefore(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})(m+n+p)\leqslant 2\sqrt{6}(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})$………7分

$\therefore 2\sqrt{6}(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p})\geqslant 9$，$\therefore\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}\geqslant\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$………8分

即$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\geqslant\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$，当且仅当$a=b=c=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$时，等式成立………9分

故$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$的最小值为$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$………10分

关于我们