“皖南八校”2021届高三第三次联考

数　　学(理科)

18所理事学校　　新考文化　　2021.4

考生注意:

1. 本试卷满分150分,考试时间120分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 做选考题时,考生须按照题目要求作答,并用2B铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。

一、选择题:本题共12小题;每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|y=\log_2(x+1)\}$,$B=\{y|y=\sin x,x\in\mathbf{R}\}$,且 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\{-1\}$　　C. $(-1,1]$　　D. $[-1,1]$

2. 若复数 $z_1=2+\mathrm{i}$,$z_2=1-2\mathrm{i}$,$z=z_1\cdot z_2$,则 $|z\cdot\bar{z}|=$

A. $\sqrt{5}$　　B. 5　　C. 15　　D. 25

3. “有两个面平行,其余各面都是平行四边形”是“几何体为棱柱”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要

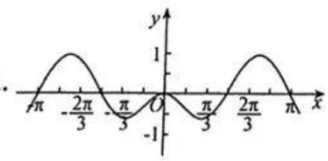
4. 已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为不共线的两个单位向量,且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=$

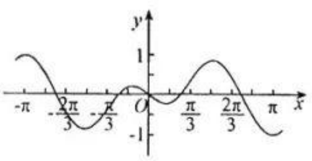
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

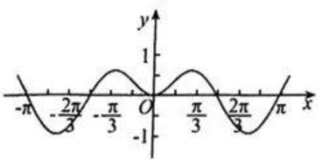
5. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,若点 $A(x_0,2\sqrt{3})$ 在抛物线上,则 $|AF|=$

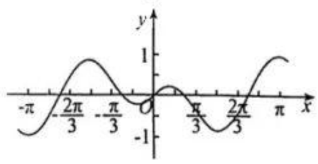
A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}+1$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{2^{x+1}-2}{2^x+1}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})\cos(\dfrac{\pi}{4}-x)$ 的图像为

A. 

B. 

C. 

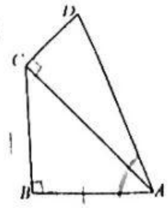
D. 

7. 已知直线 $l:x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$ 与圆 $O:x^2+y^2=6$ 交于 A,B 两点.

下列说法:①线段 AB 的长度为定值;②圆 O 上总有4个点到 l 的距离为 $\sqrt{2}$;③线段 AB 的中点轨迹方程为:$x^2+y^2=1$.其中正确的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 如图，四边形 $ABCD$ 中 $AB=BC=1$，$\angle ABC=\angle ACD=\frac{\pi}{2}$，且$\triangle ABC$、$\triangle ACD$的周长相等，则 $\sin 2\angle BAD=$



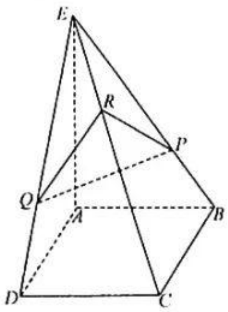
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{7}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 平面直角坐标系 xOy 上有一个以$(0,0)$，$(4,0)$，$(0,4)$，$(4,4)$为顶点的正方形. 在正方形内随机取一点，该点位于以格点（横、纵坐标均为整数的点）为圆心，r 为半径的圆内的概率为$\frac{1}{2}$，则 r 的值为

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$　　B. $\frac{\sqrt{3\pi}}{3\pi}$　　C. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$　　D. $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$

10. 如图，已知四棱锥 $E-ABCD$，底面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$AE\perp$面 $ABCD$，$\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{QD}$，$\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{ER}=\frac{1}{2}\overrightarrow{RC}$，若 $RP=RQ=\sqrt{6}$，则四棱锥 $E-ABCD$ 外接球表面积为



A. 44π　　B. 54π

C. 176π　　D. 216π

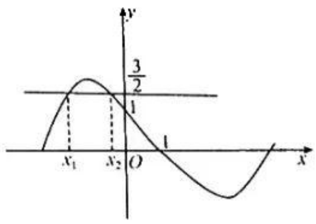
11. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi)$的一个周期的图象如图所示，其中 $f(0)=1$，$f(1)=0$. $f(x_1)=f(x_2)=\frac{3}{2}$，则 $f(x_1+x_2)$等于

A. 2

B. 0

C. 1

D. $-\frac{1}{2}$



12. 已知双曲线 $C_1:x^2-\frac{y^2}{4}=1$，椭圆 $C_2:x^2+\frac{y^2}{4}=m(m>0)$上一点 P（P 不在 C_1 的渐近线上），过点 P 分别作平行于双曲线两条渐近线的直线，分别交渐近线于 E，F 两点，且$|PE|^2+|PF|^2=5$，则 $m=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 4　　D. 8

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，a_1,a_2,a_4成等比数列，且 $S_3=6$，则 $a_5=$________.

14. 已知$\triangle ABC$中角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，D 为边 BC 上一点，且 AD 为$\angle BAC$ 的角平分线，若$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$AD=\sqrt{3}$，则 $b+c$ 最小值为________.

15. 17 世纪至 18 世纪的德国数学家莱布尼茨，是世界上第一个提出二进制记数法的人. 用二进制记数，只用 0 和 1 两个符号，无需其他符号. 以 0 开头，以 0 结尾，不包含两个连续的 0，也不包含三个连续的 1，且长度为 9 的只含 0 或 1 的序列共有________个.

16. 用符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数，例如：$[-1.2]=-2$，$[0.6]=0$，$[2]=2$. 已知函数 $f(x)=x^3\ln x$，当 $f(x)$的值域为$(2e^6,+\infty)$时，$[\log_{\sqrt{x}} f(x)]$的值为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

设 S_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1=1$，$a_{n+1}+S_n\cdot S_{n+1}=0$，数列$\{b_n\}$的通项为 $b_n=2^{\frac{n}{2}-1}$.

(1)求证：$\{\frac{1}{S_n}\}$是等差数列；

(2)设 $c_n=\frac{b_n^2}{S_n}$，求$\{c_n\}$前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

十三届全国政协、人大四次会议分别于 2021 年 3 月 4 日、3 月 5 日在北京召开. 其中有一位是中学校长的政协委员谈到现在学生发育好，但体能差，他认为好的教育应该注重培养终身运动者，他的观点引起社会较大关注. 某地区对高一学生进行体能测试，随机抽取了 100 名高一学生的体能测试成绩（单位：分，满分 10 分），把所得数据列成了如下表所示的频数分布表：

组别	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10]
频数	5	18	28	26	17	6

(1)求抽取的样本平均数$\overline{x}$（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

(2)近似地认为这次体能测试成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（其中 μ 近似为样本平均数$\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 $s^2=1.61$）. 若规定得分 8.27 为良好，随机抽取 5 个这个地区的高一学生体能测试成绩，那么成绩良好的期望是多少个？

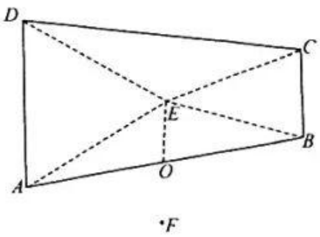
参考数据：$\sqrt{1.61}\approx1.27$，若 $z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<z<\mu+\sigma)=0.682\ 6$，$P(\mu-2\sigma<z<\mu+2\sigma)=0.954\ 4$.

19.（12 分）

如图，四棱锥 $E-ABCD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\parallel BC$，$AD\perp$面 ABE，$AE=AD=BE=2BC$，$\angle AEB=\frac{2\pi}{3}$，$O$ 为 AB 中点.

(1)证明：面 $EOC\perp$面 $ABCD$；

(2)点 F 是点 E 关于面 $ABCD$ 对称的点，求二面角 $O-CD-F$ 的余弦值.



20.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，过点 F 的直线 l 与椭圆交于 A,B 两点，当直线 $l\perp x$ 轴时，$|AB|=\sqrt{2}$，$\tan\angle AOB=2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设直线 $l'\perp l$，直线 l' 与直线 l、x 轴、y 轴分别交于点 M、P、Q，当点 M 为线段 AB 中点时，求 $\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}}{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ}}$ 的取值范围.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{-\ln x}{x}$.

(1)设 $g(x)=f(x)+f(\frac{x}{x-1})$，求函数 $g(x)$ 的最小值；

(2)设 $h(x)=f(\frac{1}{x})$，对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$h(x_1)+h(x_2)\geqslant h(x_1+x_2)+k(x_1+x_2)$ 恒成立，求 k 的最大值.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，且曲线 C_1 与极轴的交点为 M（异于极点）；曲线 C_2 的圆心为 $C_2(3,0)$，且过极点 O.

(1)求点 M 的直角坐标及曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2)若射线 $l:\theta=\alpha(\rho>0,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}))$ 与曲线 C_1、C_2 分别交于点 A、B，当 $\angle ABM=\frac{\pi}{6}$ 时，求 $\tan\alpha$.

23.[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+1|+|2ax+1|$.

(1)若 $a=1$，解不等式 $f(x)>3-x$；

(2)当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)\leqslant|x+3|$ 恒成立，求 a 的取值范围.

“皖南八校”2021届高三第三次联考·数学(理科)
参考答案、解析及评分细则

1.B　$A=(-1,+\infty)$，$B=[-1,1]$，$\complement_{R}A=(-\infty,-1]$，可得$(\complement_{R}A)\cap B=\{-1\}$，故选B.

2.D　$z=z_1z_2=(2+i)(1-2i)=4-3i$，故$|z\cdot\bar{z}|=|z|^2=25$.

3.B　由棱柱定义可知棱柱有两个面平行，其余各面都是平行四边形，但有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体不一定是棱柱，例如两个底面全等的斜棱柱拼接的几何体不是棱柱.

4.D　依题意$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角为$\frac{\pi}{3}$，故$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$.

5.C　$A(x_0,2\sqrt{3})$，则$12=4x_0\Rightarrow x_0=3$，故$|AF|=x_0+1=4$.

6.D　$f(x)=\frac{2^{x+1}-2}{2^x+1}\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}\cos 2x$，$f(x)+f(-x)=0$，故$f(x)$为奇函数，

由$f(\pi)=\frac{2^\pi-1}{2^\pi+1}\cos 2\pi>0$，故选D.

7.D　圆心O到直线l的距离$d=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=1$，则$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{5}$为定值，故①正确；

$d<r-1=\sqrt{6}-1$，故②正确；

线段AB的中点与圆心O距离恒等于1，故③正确.

8.C　依题意，$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，$AC=\sqrt{2}$，设$CD=x$，则$AD=\sqrt{2+x^2}$，$\triangle ABC$，$\triangle ACD$的周长相等，则$x+\sqrt{2+x^2}=2$，解得$x=\frac{1}{2}$，则$AD=\frac{3}{2}$，于是$\sin\angle CAD=\frac{1}{3}$，$\cos\angle CAD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

故$\sin\angle BAD=\sin(\frac{\pi}{4}+\angle CAD)=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$；$\cos\angle BAD=\cos(\frac{\pi}{4}+\angle CAD)=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$；

$\therefore\sin2\angle BAD=2\sin\angle BAD\cdot\cos\angle BAD=\frac{7}{9}$.

9.C　在正方形内以格点(横纵坐标均为整数的点)为圆心，r为半径的圆内部分的面积为$16\pi r^2$，故落在此区域的概率为$P=\frac{16\pi r^2}{16}=\pi r^2=\frac{1}{2}$，得$r=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$.

10.B　以A为坐标原点，以AD、AB、AE所在直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，设$AE=h$，

则$A(0,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(3,3,0)$，$D(3,0,0)$，$E(0,0,h)$，

则$P(0,2,\frac{h}{3})$，$Q(2,0,\frac{h}{3})$，$R(1,1,\frac{2h}{3})$，

于是$|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{2+\frac{h^2}{9}}$，

则$\sqrt{2+\frac{h^2}{9}}=\sqrt{6}$，$\therefore h=6$，四棱锥$E-ABCD$外接球直径为$|EC|=\sqrt{3^2+3^2+6^2}=\sqrt{54}$.

故其表面积为$4\pi r^2=\pi|EC|^2=54\pi$.

11.C　由$f(0)=1\Rightarrow\sin\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{5\pi}{6}$，

由$f(1)=0\Rightarrow\omega+\varphi=k\pi\Rightarrow\omega=k\pi-\frac{5\pi}{6}$，$k\in Z$.

又因为周期$T>4(1-0)\Rightarrow\frac{2\pi}{\omega}>4\Rightarrow0<\omega<\frac{\pi}{2}$.

所以$\omega=\frac{\pi}{6}$，$f(x)=2\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{5\pi}{6})$，因此点$(x_1,\frac{3}{2})$，$(x_2,\frac{3}{2})$，

关于直线$x=-2$对称，$x_1+x_2=-4$，$f(x_1+x_2)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$.

12. B　设 $P(x_0,y_0)$，联立 $\begin{cases}y-y_0=2(x-x_0)\\ y=-2x\end{cases}$ 得 $x_E=\dfrac{2x_0-y_0}{4}$，

联立 $\begin{cases}y-y_0=-2(x-x_0)\\ y=2x\end{cases}$ 得 $x_F=\dfrac{2x_0+y_0}{4}$，

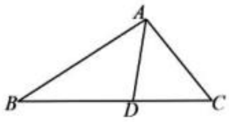
$|PE|^2+|PF|^2=|OE|^2+|OF|^2=(\sqrt{1+2^2})^2(x_E^2+x_F^2)=5[(\dfrac{2x_0-y_0}{4})^2+(\dfrac{2x_0+y_0}{4})^2]=\dfrac{5(4x_0^2+y_0^2)}{8}$，

又 $4x_0^2+y_0^2=4m$，故 $m=2$.

13. 2 或 5　$S_3=3a_2=6$，∴$a_2=2$，a_1,a_2,a_4 成等比数列，则 $a_2{}^2=(a_2-d)(a_2+2d)$，

即 $2^2=(2-d)(2+2d)$，解得 $d=0$ 或 $d=1$，故 $a_5=2$ 或 5.

14. 4　如图，∵AD 为角平分线，



$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，∴$\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD+$

$\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\angle DAC$，

化简得 $b+c=bc$，∴$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$，则 $b+c=(b+c)(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})=2+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\geqslant 4$，

当且仅当 $c=b$ 时取等号，故 $b+c$ 最小值为 4.

15. 4　0 后面只能接 1 或 11，记 01 为 A，011 为 B，原问题等价于将一些 A 和 B 排列在长度为 8 的序列上，情形(1)：4 个 A，只有 1 种排列，情形(2)：2 个 B，1 个 A，共有 $C_3^1=3$ 种排列，故共有 4 种排列.

16. 6　易知 $f(x)$ 在 $(0,e^{-\frac{1}{3}})$ 单调递减，且 $f(x)<0$；在 $(e^{-\frac{1}{3}},+\infty)$ 单调递增，

故 $f(x)>2e^6$ 的解集应是单调递增区间 $(e^{-\frac{1}{3}},+\infty)$ 的子集，又 $f(e^2)=2e^6$，从而 $x>e^2$，

令 $h(x)=\log_{\sqrt{x}}f(x)=\log_{\sqrt{x}}(x^3\ln x)=6+\log_{\sqrt{x}}\ln x=6+\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln\sqrt{x}}=6+\dfrac{2\ln(\ln x)}{\ln x}$.

令 $s=\ln x$，则 $h(x)=m(s)=6+\dfrac{2\ln s}{s}(s>2)$，所以 $m'(s)=\dfrac{2(1-\ln s)}{s^2}$，

显然当 $2<s<e$ 时，$m'(s)>0$；当 $s>e$ 时，$m'(s)<0$. 从而 $m(s)$ 在 $(2,e)$ 单调递增，在 $(e,+\infty)$ 单调递减，所以 $m(s)_{\max}=m(e)=6+\dfrac{2}{e}$，又 $s>2>1$，所以 $\dfrac{2\ln s}{s}>0$，从而 $m(s)>6$，于是 $6<m(s)\leqslant 6+\dfrac{2}{e}$，则 $[\log_{\sqrt{x}}f(x)]=6$.

17. 解：(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，$S_{n+1}-S_n+S_n\cdot S_{n+1}=0$，得到 $\dfrac{1}{S_{n+1}}-\dfrac{1}{S_n}=1$，…………………… 3 分

因此 $\{\dfrac{1}{S_n}\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，故 $\dfrac{1}{S_n}=n$. …………………… 5 分

(2) 依题意可得：$c_n=4n\cdot 2^n$，

$T_n=4\cdot 2^1+8\cdot 2^2+12\cdot 2^3+\cdots+4n\cdot 2^n$，　① …………………… 8 分

$2T_n=4\cdot 2^2+8\cdot 2^3+12\cdot 2^4+\cdots+4n\cdot 2^{n+1}$.　② …………………… 9 分

②－①得

$T_n=4n\cdot 2^{n+1}-4(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)$ …………………… 11 分

$=(n-1)\cdot 2^{n+3}+8$. …………………… 12 分

18. 解：(1) 由所得数据列成的频数分布表，得：样本平均数

$\overline{x}=4.5\times 0.05+5.5\times 0.18+6.5\times 0.28+7.5\times 0.26+8.5\times 0.17+9.5\times 0.06=7$. …………………… 4 分

(2) 由(1)知 $z\sim N(7,1.61)$， …………………… 6 分

∴$P(z>8.27)=\dfrac{1-0.6826}{2}=0.1587$. …………………… 8 分

设成绩合格的个数为 x，则 $x\sim B(5,0.1587)$， …………………… 10 分

故 $Ex=5\times 0.1587=0.7935$. …………………… 12 分

19. (1) 证明：∵$AE=BE$，O 为 AB 中点，∴$EO\perp AB$， …………………… 1 分

$AD\perp$ 面 ABE，$EO\subset$ 面 ABE，$\therefore AD\perp EO$，………………………………………… 2 分

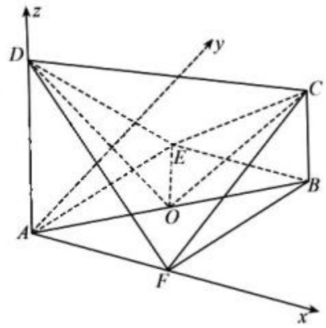
又 $AB\cap AD=A$，$\therefore EO\perp$ 面 $ABCD$，………………………………………… 3 分

又 $EO\subset$ 面 EOC，所以面 $EOC\perp$ 面 $ABCD$. ………………………………………… 5 分

(2)连 AF，BF，点 F 与点 E 关于面 $ABCD$ 对称，而 $EO\perp$ 面 $ABCD$，

故 E，O，F 三点共线，在平面 $AEBF$ 内，过点 A 作 $Ay\perp AF$，

以 A 为坐标原点，AF，Ay，AD 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示空间直角坐标系. ………………………………………… 7 分



设 $BC=1$，则 $A(0,0,0)$，$D(0,0,2)$，$E(1,\sqrt{3},0)$，$F(2,0,0)$，$B(3,\sqrt{3},0)$，$C(3,\sqrt{3},1)$，………………………………………… 8 分

则 $O(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\because EO\perp$ 面 $ABCD$，$\therefore$ 面 OCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{EO}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{DF}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{FC}=(1,\sqrt{3},1)$，………………………………………… 9 分

设面 CDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=2x-2z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FC}=x+\sqrt{3}y+z=0\end{cases}$，

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-\frac{2\sqrt{3}}{3},1)$. ………………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EO}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EO}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EO}|}=\frac{3\sqrt{30}}{20}$，………………………………………… 11 分

二面角 $O-CD-F$ 为锐角，故二面角 $O-CD-F$ 余弦值为 $\frac{3\sqrt{30}}{20}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意可知 $F(-c,0)$，直线 $l\perp x$ 轴时，$|AB|=\frac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$，………………………………………… 1 分

$\tan\angle AOB=\frac{2\tan\angle AOF}{1-\tan^2\angle AOF}=2\sqrt{2}$，解得 $\tan\angle AOF=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\sqrt{2}$，………………………………………… 2 分

$\because\angle AOF\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\therefore\tan\angle AOF=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|AF|}{|FO|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{c}$. ………………………………………… 3 分

得 $b=c=1$，$a=\sqrt{2}$，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，依题意直线 l 斜率一定存在且不为零，设 l：$y=k(x+1)$，………………………………………… 5 分

代入椭圆方程得：$(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

则 $x_1+x_2=\frac{-4k^2}{2k^2+1}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2+2)=\frac{2k}{2k^2+1}$. ………………………………………… 7 分

故 $M(\frac{-2k^2}{2k^2+1},\frac{k}{2k^2+1})$，………………………………………… 8 分

直线 l'：$y-\frac{k}{2k^2+1}=-\frac{1}{k}(x+\frac{2k^2}{2k^2+1})$，令 $y=0$，则 $P(\frac{-k^2}{2k^2+1},0)$，………………………………………… 9 分

$\because PM\perp MF$，$OQ\perp PO$，$\therefore\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}=|PM|^2$，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ}=|PO|^2$，

$\therefore\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}}{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ}}=\frac{|PM|^2}{|PO|^2}=\frac{(\frac{-k^2}{2k^2+1}-\frac{-2k^2}{2k^2+1})^2+(\frac{k}{2k^2+1})^2}{(\frac{-k^2}{2k^2+1})^2}=\frac{k^2+1}{k^2}=1+\frac{1}{k^2}$，………………………………………… 11 分

$\because k^2\in(0,+\infty)$，$\therefore 1+\frac{1}{k^2}\in(1,+\infty)$，$\therefore\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}}{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ}}\in(1,+\infty)$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1) $f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$，令 $t=\frac{1}{x}$，则 $F(t)=g(x)=t\ln t+(1-t)\ln(1-t)$，$t\in(0,1)$. ………………………………………… 2 分

$F'(t)=\ln t+1-[\ln(1-t)+1]=\ln\frac{t}{1-t}$， …… 4分

当 $t\in(0,\frac{1}{2})$，$F'(t)<0$，$F(t)$单调递减；当 $t\in(\frac{1}{2},1)$，$F'(t)>0$，$F(t)$单调递增.

所以 $F(t)$的最小值为：$F(\frac{1}{2})=-\ln 2$. …… 6分

(2)$h(x)=x\ln x$，

$h(x_1)+h(x_2)-h(x_1+x_2)=x_1\ln x_1+x_2\ln x_2-(x_1+x_2)\ln(x_1+x_2)=x_1\ln\frac{x_1}{x_1+x_2}+x_2\ln\frac{x_2}{x_1+x_2}=(x_1+x_2)[\frac{x_1}{x_1+x_2}\ln\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_2}\ln\frac{x_2}{x_1+x_2}]=(x_1+x_2)[h(\frac{x_1}{x_1+x_2})+h(\frac{x_2}{x_1+x_2})]$. …… 8分

由(1)知 $h(\frac{x_1}{x_1+x_2})+h(\frac{x_2}{x_1+x_2})=F(\frac{x_1}{x_1+x_2})\geqslant-\ln 2$，

所以 $h(x_1)+h(x_2)-h(x_1+x_2)\geqslant-(x_1+x_2)\cdot\ln 2$. …… 10分

所以 $k\leqslant-\ln 2$. …… 12分

22. 解：(1)由已知可得圆 C_1 的直角坐标方程为：$(x-1)^2+y^2=1$，则点 M 的直角坐标为$(2,0)$， …… 2分

圆 C_2 的半径为3，故圆 C_2 的直角坐标方程为$(x-3)^2+y^2=9$. …… 4分

(2)依题意设 A，B 极坐标分别为 $A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$，

圆 C_2 的极坐标方程为 $\rho=6\cos\alpha$， …… 5分

则$|AB|=\rho_2-\rho_1=6\cos\alpha-2\cos\alpha=4\cos\alpha$， …… 6分

$\because OM$ 为圆 C_1 直径，故 $OA\perp AM$，$\therefore|AM|=2\sin\alpha$， …… 8分

则在 $Rt\triangle ABM$ 中，$\angle ABM=\frac{\pi}{6}$，$|AB|=\sqrt{3}|AM|$， …… 9分

则 $4\cos\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha$，故 $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. …… 10分

23. 解：(1)若 $a=1$，则 $f(x)=|x+1|+|2x+1|=\begin{cases}-2-3x, x\in(-\infty,-1)\\ -x, x\in[-1,-\frac{1}{2}]\\ 3x+2, x\in(-\frac{1}{2},+\infty)\end{cases}$， …… 2分

当 $x\in(-\infty,-1)$，则 $f(x)>3-x$，即为 $-2-3x>3-x$，得 $x\in(-\infty,-\frac{5}{2})$；

当 $x\in[-1,-\frac{1}{2}]$，则 $f(x)>3-x$，即为 $-x>3-x$，得 $x\in\varnothing$；

当 $x\in(-\frac{1}{2},+\infty)$，则 $f(x)>3-x$，即为 $3x+2>3-x$，得 $x\in(\frac{1}{4},+\infty)$； …… 4分

综上：不等式 $f(x)>3-x$ 的解集为$(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(\frac{1}{4},+\infty)$. …… 5分

(2)当 $x\in[-1,1]$时，$f(x)\leqslant|x+3|$，等价于$|2ax+1|\leqslant 2$. …… 7分

只需$\begin{cases}|1-2a|\leqslant 2\\ |1+2a|\leqslant 2\end{cases}$， …… 8分

解得 $a\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. …… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》